Concours Centrale - Supélec 1997

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière MP

Étant donnée une suite réelle (a_n), on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite réelle (u_n) définie à partir de ces deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation $(\mathfrak{R})$:

$$u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1} \text{ où } n \geq 1$$

Partie I - Étude de la convergence de la suite (u_n)

I.A - On suppose dans la sous partie I.A que la suite (a_n) est à termes positifs et que $u_0 \geq 0$ et $u_1 > 0$.

I.A.1) Étudier, pour $n \geq 1$, le sens de variation de la suite (u_n).

I.A.2) Établir, pour $n \geq 2$, l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n \exp(a_{n-1})$.

En déduire que si la série Σa_n converge, alors la suite (u_n) converge aussi.

I.A.3) Établir réciproquement que si la suite (u_n) converge, alors la série Σa_n est convergente.

I.B - Dans la sous partie I.B, on suppose la série Σa_n absolument convergente et l'on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}| v_{n-1}$

I.B.1) Comparer $|u_n|$ et v_n.

I.B.2) Étudier la convergence absolue de la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite (u_n).

I.C - On suppose dans la question I.C que $a_n = a^n$, a étant un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle. Déterminer un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ et en déduire un équivalent de $L - u_n$ en interprétant $L - u_n$ comme reste d'ordre n de la série $\Sigma(u_{k+1} - u_k)$ (on citera précisément le théorème utilisé).

I.D - On suppose dans la sous partie I.D que

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle.

I.D.1) Prouver que $u_{k+1} - u_k$ est équivalent à

$$L \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2}$$

et en déduire que $L - u_n$ est équivalent à $\frac{L}{n}$.

I.D.2) On définit la suite (ε_n), en posant pour $n \geq 1$

$$u_n = L - \frac{L}{n} + \varepsilon_n.$$

Déterminer de même un équivalent de $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$, puis de ε_n, et en déduire le développement limité à l'ordre 2 de u_n par rapport à $\frac{1}{n}$.

Partie II - Étude des suites (u_n) de limite nulle

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout entier naturel n et la série Σa_n convergente. Toute suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1 et définie par la relation $(\mathfrak{R})$ est donc convergente. On note $L(u_0, u_1)$ sa limite.

II.A - Montrer que l'application

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u_0, u_1) \mapsto L(u_0, u_1)$$

est linéaire.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera le couple (u_0, u_1) distinct du couple $(0, 0)$.

II.B - On note N le noyau de l'application linéaire L.

II.B.1) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m = 0$, alors la limite $L(u_0, u_1)$ de la suite (u_n) est non nulle.

II.B.2) Déterminer la dimension du sous-espace N.

II.C - On dira que la suite (u_n) est alternée si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout indice n.

II.C.1) Montrer que le couple de réels (u_0, u_1) est dans N si et seulement si la suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1 est alternée.

II.C.2) Le rapport $r_0 = -u_1/u_0$ dépend-t-il de l'élément (u_0, u_1) choisi dans $N \setminus \{(0, 0)\}$?

II.D - On suppose dans cette question que le couple (u_0, u_1) appartient à N, donc que la suite (u_n) est alternée. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

II.D.1) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} \text{ et } 0 < r_n < a_n.$$

II.D.2) En déduire que la suite (r_n) converge vers une limite que l'on précisera.

II.D.3) Étudier enfin la convergence des séries Σr_n, Σu_n et $\Sigma |u_n|$.

Partie III - Application à la résolution d'une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle (E) :

$$(x-1)y'' + 2y' + y = 0$$

III.A - Déterminer les solutions de (E) développables en série entière pour $|x| < 1$, puis montrer que toutes les solutions de (E) sur $]-1, +1[$ sont développables en série entière sur cet intervalle.

III.B - Montrer que, parmi ces solutions, il existe une droite vectorielle de solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

III.C - Soit f une solution de (E) développable en série entière sur $]-1, +1[$, mais pas sur $\mathbb{R}$. En utilisant les résultats de I.D, montrer que f admet pour développement asymptotique quand x tend vers 1 à gauche :

$$f(x) = \frac{L}{1-x} + L\ \ln(1-x) + g(x)$$

où L est un réel non nul et g une fonction admettant une limite finie lorsque x tend vers 1 à gauche.

Partie IV - Étude du noyau N de l'application L

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout indice n et la série Σa_n convergente. Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions

$$f_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{a_n}{1+x}$$

$$g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$$

On pose $p_n = g_n(0)$.

Par ailleurs r_0 est l'unique réel tel que, pour tout u_1 non nul, le couple $(-r_0 u_1, u_1)$ est élément de N (cf. II.D).

IV.A - Établir que f_n et g_n sont monotones, dérivables, et que, pour $x \geq 0$,

$$|g_n'(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n.$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

IV.B - Établir que, pour tout entier $n \geq 1$, r_0 est compris entre p_{n-1} et p_n. En déduire que r_0 est limite de la suite (p_n).

IV.C - La suite (a_n) et un réel $\varepsilon > 0$ étant donnés, écrire en français ou dans un langage de programmation un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée à moins de ε près de r_0.

IV.D - Déterminer le nombre r_0 à 10^{-5} près lorsque

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

••• FIN •••