Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière PC

On désigne par p une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et par A sa primitive s'annulant en 0,

$$A : x \mapsto \int_0^x p(t)dt .$$

Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{C}_f$ l'ensemble des réels x en lesquels f est continue et E_f l'équation différentielle $y' + py = f$.

Par abus de langage, on dira dans ce problème que φ est une solution de E_f si φ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, dérivable sur $\mathscr{C}_f$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathscr{C}_f \ , \ \varphi'(x) + p(x)\varphi(x) = f(x) .$$

Partie I - Généralités

I.A - Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et ψ une application lipschitzienne de $]a, b[$ dans $\mathbb{C}$.

I.A.1) Montrer que les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies respectivement pour $n \geq 1$ par

$$U_n = \psi\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right), \text{ et } V_n = \psi\left(b - \frac{b-a}{n+1}\right),$$

ont une limite, notée respectivement U et V, lorsque n tend vers l'infini.

I.A.2) On définit la fonction ψ_0 de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ en posant : $\psi_0(a) = U$, $\psi_0(b) = V$ et, pour tout $x \in]a, b[$, $\psi_0(x) = \psi(x)$. Montrer que ψ_0 est lipchitzienne sur $[a,b]$.

I.A.3) En déduire que ψ admet un prolongement continu à $[a,b]$.

I.B - Soit φ une solution de E_f. On pose $\psi : x \mapsto e^{A(x)}\varphi(x)$.

I.B.1) Calculer la valeur de

$$\psi(x) - \int_0^x e^{A(t)} f(t)dt$$

pour x réel.

I.B.2) Montrer que φ est continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.C - Montrer que pour tout réel α, E_f admet une unique solution continue sur $\mathbb{R}$, notée φ, vérifiant $\varphi(0) = \alpha$.

I.D - Dans cette question I.D, on suppose que p est constante et que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec R pour rayon de convergence ($R > 0$). Montrer que toute solution continue de E_f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence de cette série entière.

Partie II - Périodicité

On suppose, dans toute la suite du problème, que les fonctions f et p sont 2π- périodiques et que :

$$\int_0^{2\pi} p(t)dt \neq 0 .$$

II.A -

II.A.1) Si φ est une solution continue de E_f, montrer que φ est 2π- périodique si, et seulement si, $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$.

II.A.2) En déduire que E_f admet une unique solution continue et 2π- périodique. On la note $\tilde{f}$.

On suppose dans toute la suite du problème que p est constante égale à 1 : la condition

$$\int_0^{2\pi} p(t)dt = 2\pi \neq 0$$

est donc vérifiée.

II.B - Expliciter $\tilde{f}$ si f est définie par $f(0) = f(\pi) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$ et $f(x) = 0$ si $\pi < x < 2\pi$.

Partie III - Développement en série de Fourier

On suppose dans cette partie que f est une fonction 2π- périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 par morceaux.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'application définie pour tout x réel par $e_n(x) = e^{inx}$ et par c_n le coefficient de Fourier de rang n de f (autrement dit $c_n = c_n(f)$ avec les notations habituelles).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme de Fourier de f d'indice n par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k .$$

III.A -

III.A.1) Montrer que, pour tout x élément de $\mathscr{C}_f$, $S_n(f)(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$.

On admet, dans toute la suite, que $(S_n(f))$ converge vers f uniformément sur tout segment inclus dans $\mathscr{C}_f$.

III.A.2) Montrer que les séries $\sum |c_n|^2$ et $\sum |c_{-n}|^2$ sont convergentes.

III.A.3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite telle que, lorsque $|n|$ tend vers l'infini, $|a_n|$ est équivalent à $|c_n/n|$.

Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum a_{-n}$ sont absolument convergentes.

III.B - Soit $\tilde{f}$ la solution continue 2π-périodique de E_f définie en II. On désigne par $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $\tilde{f}$: $\alpha_n = c_n(\tilde{f})$.

Montrer que $\tilde{f}\,'$ est de classe C^1 par morceaux et que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$c_n(\tilde{f}\,') = i n \alpha_n .$$

III.C - Dans cette question III.C on pose, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $\alpha_n = \dfrac{c_n}{1 + in}$.

III.C.1) Montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=-n}^{n} i k \alpha_k e_k$$

converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathscr{C}_f$.

III.C.2) Montrer que

$$\tilde{f} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k .$$

III.D - Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge en décroissant vers 0.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on note φ_k l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_k(x) = \sin((2k+1)x)$.

On fixe un réel β dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $I_\beta = [\beta, \pi - \beta]$.

III.D.1) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans I_β,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{\sin \beta} .$$

III.D.2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \phi_k + \alpha_n \phi_n .$$

III.D.3) En déduire la convergence uniforme de la série de terme général $\alpha_k \varphi_k$ sur I_β.

III.E - On reprend la fonction f définie au II.B.

III.E.1) Expliciter la série de Fourier de f et préciser sa somme sur $\mathbb{R}$. Démontrer explicitement que, pour cette fonction f, la suite $(S_n(f))$ converge vers f uniformément sur tout segment inclus dans $\mathscr{C}_f$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

III.E.2) Expliciter la série de Fourier de $\tilde{f}$ et donner sa somme.

III.F - Reprendre les questions III.E.1 et III.E.2 si f est définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\pi} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ f(x) = \dfrac{1}{\pi}(2\pi - x) & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

••• FIN •••