Concours Centrale - Supélec 1997

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

Notations

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Si z est un nombre complexe on notera $Re(z)$ sa partie réelle.

On considère une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty .$$

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $\mathbb{C}$ la fonction u_n par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z}.$$

On note :

$$\mathrm{I}_C = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sum_{n\geq 1} u_n(x) \text{ converge} \right\};$$

$$\mathrm{I}_A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sum_{n\geq 1} |u_n(x)| \text{ converge} \right\}.$$

Si ces deux ensembles sont non vides et minorés on pose dans tout le problème :

$$\gamma = \inf(\mathrm{I}_C) \text{ et}$$

$$\delta = \inf(\mathrm{I}_A).$$

Soit φ la fonction continue définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \sup\{1-|t-1|, 0\}.$$

On suppose que $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels tels que :

$$\forall n \geq 1, 0 < r_n < \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)$$

Partie I - Préliminaires

I.A - Représenter graphiquement la fonction φ et calculer $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt$.

I.B -

I.B.1) Montrer que la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

I.B.2) Prouver que pour tout entier $p \geq 1$:

$$\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)dt = a_p.$$

I.C - Soit h une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui admet en $+\infty$ une limite $L \in \mathbb{C}$. Montrer que h est bornée sur $[0, +\infty[$.

Partie II - Exemples

Dans cette partie on choisit $\lambda_n = \ln n$ pour tout entier $n \geq 1$.

II.A - Déterminer γ, δ, I_A et I_C dans les cas suivants :

a) $a_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$;

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n(n+1)}$ pour tout entier $n \geq 1$.

II.B - On suppose dans cette sous-partie II.B que I_A et I_C sont non vides et minorés.

II.B.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $Re(z) > \delta$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ est absolument convergente.

II.B.2) Montrer que : $\gamma \leq \delta \leq \gamma + 1$.

II.B.3) Donner un exemple pour lequel $\gamma = \delta$.

II.B.4) Donner un exemple pour lequel $\gamma + 1 = \delta$.

II.C - En choisissant, pour $n \geq 2$,

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

montrer qu'il est possible d'obtenir $\gamma < \delta < \gamma + 1$.

Partie III - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie on choisit $\lambda_n = \ln(n+1)$ et $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$, pour tout entier $n \geq 1$.

On note U la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0\,,\ U(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)\,.$$

III.A - Montrer que U est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

III.B - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x)$.

III.C - Soit un entier $p \geq 1$. Montrer que U est une fonction de classe C^p sur $[0, +\infty[$.

III.D - Étudier le signe de $U'(x)$ pour $x \geq 0$.

III.E -

III.E.1) Établir que u_n est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

III.E.2) Montrer que U est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer

$$\int_0^{+\infty} U(x)dx\,.$$

III.F - Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près des réels $U(0)$ et $U'(0)$.

III.G - Donner l'allure de la représentation graphique de U dans un repère orthogonal (préciser les unités choisies sur chacun des axes).

Partie IV - Étude de I_A et I_C dans le cas général

IV.A -

IV.A.1) Prouver que I_A est un intervalle.

IV.A.2) On suppose que :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et}$$

$$\lambda_n = \ln|\ln(n+1)|\,.$$

Établir que $I_A = \varnothing$ et $I_C = \mathbb{R}$.

IV.A.3) Donner un exemple de couple (a_n, λ_n) pour lequel $I_A = I_C = \varnothing$.

IV.A.4) Donner un exemple de couple (a_n, λ_n) pour lequel $I_A = I_C = \mathbb{R}$.

IV.B - On suppose dans cette sous-partie IV.B que I_C est non vide et minoré.

IV.B.1) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > \gamma$, la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n(z)$$

converge.

IV.B.2) Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que la fonction F, définie par

$$\forall t \in [0, +\infty[\,,\ F(t) = \int_0^t f(x)e^{-\alpha x}dx$$

admette une limite finie en $+\infty$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > \alpha$.

a) Montrer que $t \mapsto F(t)e^{(\alpha - z)t}$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire que la suite

$$\left(\int_0^{\lambda_n} f(x)e^{-zx}dx\right)_{n \geq 1}$$

est convergente.

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

IV.B.3) On pose

$$v_n(z) = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} g(x)e^{-zx}dx$$

et on suppose que la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est choisie de telle sorte que la série

$$\sum_{n \geq 1} (v_n(z) - u_n(z))$$

est convergente (on admet qu'un tel choix est possible). Déduire des questions précédentes et des préliminaires que la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n(z)$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > \gamma$. En déduire que I_C est un intervalle.

••• FIN •••