Concours Centrale - Supélec 1997

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, n entier non nul, dont on note $\langle . \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme.

Un endomorphisme f de E est appelé similitude de E s'il existe $k > 0$ tel que, pour tout x de E, $\|f(x)\| = k\|x\|$; la similitude f est dite directe si le déterminant de f est strictement positif.

On désigne par $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, par $GO(E)$ l'ensemble des similitudes et par $GO^+(E)$ l'ensemble des similitudes directes. Si u est un endomorphisme de E, on note u^* l'adjoint de u.

Partie I -

I.A - Montrer que $GO(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ et que $GO^+(E)$ est un sous-groupe de $GO(E)$.

I.B - Montrer qu'une similitude de E s'écrit d'une manière et d'une seule comme composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'un automorphisme orthogonal de E.

I.C -

I.C.1) Montrer qu'un endomorphisme f de E est une similitude si et seulement s'il existe un réel a non nul tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = a\langle x, y\rangle .$$

I.C.2) Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un réel a non nul vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = a\langle x, y\rangle .$$

Calculer $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|$.

Montrer que f est une similitude.

I.D -

I.D.1) Montrer que $GO(E)$ est exactement l'ensemble des automorphismes f de E qui transforment deux vecteurs orthogonaux de E en deux vecteurs orthogonaux.

On pourra utiliser les formes linéaires $x \mapsto \langle x, y\rangle$ et $x \mapsto \langle f(x), f(y)\rangle$.

I.D.2) Soit $r \geq 0$; on appelle sphère de rayon r de E l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $\|x\| = r$.

Montrer que si f est un endomorphisme non nul de E qui transforme toute sphère de E en une sphère de E, alors f est une similitude.

I.E - Demontrer qu'un automorphisme f de E est une similitude si et seulement si, pour tout automorphisme orthogonal ω, l'automorphisme $f \circ \omega \circ f^{-1}$ est orthogonal. On pourra utiliser I.D et une symétrie bien choisie.

I.F - Si f est une similitude de E, calculer $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$.

Partie II -

Dans cette partie l'entier n est égal à 2.

II.A - Déterminer l'ensemble, noté $GO(2)$, des matrices de similitude de E dans une base orthonormale donnée ; préciser le sous-ensemble, noté $GO^+(2)$, des matrices de similitude directe.

II.B - Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f \circ f^* = f^* \circ f$ si et seulement si f est une similitude directe ou un endomorphisme autoadjoint.

II.C - Soient u et v deux similitudes directes, distinctes d'une homothétie, telles qu'il existe $w \in GL(E)$ vérifiant $v = w \circ u \circ w^{-1}$. Montrer que w est une similitude.

II.D - Soient $P(X)$ un polynôme unitaire réel du deuxième degré sans racines réelles et

$$F = \{u \in GL(E) / \Pi_u = P\}$$

où Π_u *est le polynôme caractéristique de* u.

II.D.1) Montrer que F contient exactement deux similitudes directes.

Montrer que : quel que soit $(f,g) \in F^2$, il existe $h \in GL(E)$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

II.D.2) Avec les notations de II.D.1, peut-on choisir $h \in GL(E)$ avec $\det(h) > 0$?

Partie III -

Dans cette partie l'entier n est égal à 3.

III.A - Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

III.A.1) Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, calculer $\|f^*(x) - \lambda x\|$.

III.A.2) Si x est un vecteur propre de f, montrer que le plan P orthogonal à x est stable par f.

III.A.3) Montrer que :

- ou bien f est autoadjoint,
- ou bien f a une seule valeur propre réelle, un seul plan stable P et l'endomorphisme induit par f sur P est une similitude directe.

III.B - Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III.B.1) Montrer que f a une seule valeur propre réelle, notée a, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près ; donner une base de l'espace propre associé.

III.B.2) Montrer qu'il existe un et un seul plan P stable par f. On pourra chercher une équation de P.

III.B.3) Soit u un vecteur non nul de P et $v = f(u)$; montrer que $B = (u,v)$ est une base de P et écrire la matrice dans B de l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur P.

III.B.4) Montrer que l'application N de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{N} : (xu + yv) \mapsto \sqrt{ax^2 + y^2 - a^2xy}$$

est une norme sur P associée à un produit scalaire.

III.B.5) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est une similitude directe sur P muni de la structure euclidienne associée à la norme N.

Partie IV -

Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère R orthonormé direct d'origine O. Soient a et b deux réels non nuls donnés avec $b > 0$, t un paramètre réel et S_t la matrice

$$S_t = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\sin(bt) \\ e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}.$$

On note σ_t la similitude de $\mathscr{E}$ définie par : si M est le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x,y) dans le repère R, alors $\sigma_t(M)$ est le point M' de coordonnées (x',y') dans R, tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soient M_0 un point de $\mathscr{E}$ différent de O et (x_0,y_0) les coordonnées de M_0.
On appelle Γ la courbe de $\mathscr{E}$ définie dans le repère R par le paramétrage :

$$t \mapsto S_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que l'application $t \mapsto S_t$ est un homomorphisme injectif du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe multiplicatif $GO^+(2)$.

IV.A.2) Déterminer tous les homomorphismes de classe C^1 du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe multiplicatif $GO^+(2)$.

IV.B -

IV.B.1) Déterminer une équation polaire de Γ. Trouver l'image de Γ par l'application σ_{t_0} (t_0 réel fixé). Démontrer que la tangente à Γ en un point M de Γ fait un angle constant avec OM.

IV.B.2) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n})$ et calculer le rayon de courbure ρ en un point M de Γ.

IV.B.3) On appelle D la courbe décrite par le point C défini par $\overrightarrow{MC} = \rho\vec{n}$. Montrer que D se déduit de Γ par une similitude de centre O, dont on précisera le rapport et l'angle.

IV.C - On appelle (P) la courbe décrite par le point P projection orthogonale du point O sur les tangentes à Γ. Montrer que (P) se déduit de Γ par une similitude de centre O. Faire un croquis, représentant les courbes $\Gamma, D, (P)$ et les points étudiés M, C, P, pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $a = 0.5$ et $b = 1$.

••• FIN •••