# Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Dans tout le problème, $n$ est un entier strictement supérieur à 1 et $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. Si $M$ est une telle matrice, ${}^tM$ désigne la matrice transposée. À une matrice $M$ de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$, on associe les $2n$ sommes

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \text{ et } \beta_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

obtenues pour $i$ et $j$ variant de $1$ à $n$ ($\gamma_j$ est la somme des éléments de la $j$-ème colonne et $\beta_i$ celle des éléments de la $i$-ème ligne). Si ces $2n$ sommes sont égales, $M$ est dite "**pseudo-magique**". On notera $s(M)$ la valeur commune à ces $2n$ sommes. Si $M$ est pseudo-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = s(M)$$

$M$ est dite "**quasi-magique**". Enfin, si $M$ est quasi-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1} = s(M)$$

$M$ est dite "**magique**".

## *Partie I - Exemples de matrices magiques d'ordre impair*

On propose ici un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique d'ordre $n$ impair quelconque et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3 \ldots, n^2$.

On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les $k$ premiers entiers ont été placés et que l'entier $k$ a été placé en $i$-ème ligne et $j$-ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $I = i-1$ (sauf si $i = 1$, auquel cas on pose $I = n$) et $J = j+1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $J = 1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la $I$-ème ligne et $J$-ème colonne, on y place $k+1$ ;
- si cet emplacement est pris, on pose $I = i+1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k+1$ en $I$-ème ligne et $J$-ème colonne.

**I.A** - Pour $n = 5$, construire une matrice magique en utilisant l'algorithme précédent.

**I.B** - La constante impaire $n$ étant supposée pré-définie, écrire un programme qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique d'ordre $n$. Le langage utilisé pour la programmation est au choix du candidat.

## *Partie II - Matrices magiques d'ordre n*

**II.A** - Montrer que, pour définir une matrice pseudo-magique, on peut choisir arbitrairement les coefficients $m_{i,j}$ pour tout $i$ et tout $j$ entre $1$ et $n-1$ ainsi que le coefficient $m_{1,n}$.

**II.B** - Montrer que l'ensemble des matrices pseudo-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

**II.C** - Exhiber une matrice pseudo-magique qui ne soit pas quasi-magique.

**II.D** - Montrer que l'ensemble des matrices quasi-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension en utilisant le résultat de la question II.B. On remarquera que l'application qui, à une matrice $M$, associe

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} - \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

**II.E** - Exhiber de même une matrice quasi-magique qui ne soit pas magique et montrer que l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

## *Partie III - Matrices magiques d'ordre 3*

Dans les parties III et IV, $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $M$ est une matrice magique. On note $u$ l'endomorphisme de $E$ qui admet $M$ comme matrice dans la base $\mathcal{E}$. On désigne par $\vec{v}$ le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{E}$.

**III.A** - Montrer que les matrices magiques d'ordre $3$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x+z & x+y+z & -y+z \\ x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x\ \ y+z & x+z \end{pmatrix},$$

où $x$, $y$ et $z$ sont des réels quelconques. Montrer qu'il existe une et une seule matrice magique dont la première ligne est $(3, 4, 5)$, et écrire cette matrice.

**III.B** - Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de $M$. Préciser la valeur propre associée $\lambda_1$.

**III.C** - On note $\lambda_2$ et $\lambda_3$ les deux autres valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice $M$. Écrire les termes de degrés 3 et 2 du polynôme caractéristique de $M$ ; calculer la somme des trois valeurs propres de $M$ en fonction des coefficients diagonaux de $M$. En déduire que $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont opposées.

**III.D** - Former une équation cartésienne du plan vectoriel $\Pi$ orthogonal à $\vec{v}$ et montrer que ce plan est stable par $u$.

**III.E** -

**III.E.1)** Préciser la direction du vecteur $u(\vec{i} - \vec{k})$, par rapport à celle de $\vec{v}$.

**III.E.2)** Montrer que $u(\vec{i} - \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{i} - \vec{k}$.

## Partie IV - Étude de certaines matrices magiques d'ordre 3

Pour $W$, sous-espace vectoriel de $E$, on note $W^\perp$ l'orthogonal de $W$ dans $E$, l'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à tous les vecteurs de $W$ ; $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$ supplémentaire de $W$. Par définition la symétrie orthogonale par rapport à $W$ est la symétrie par rapport à $W$ parallèlement à $W^\perp$. Un retournement (ou demi-tour) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

**IV.A** - *Étude préliminaire des symétries orthogonales*

Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $S$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{E}$.

**IV.A.1)** Montrer que, pour que $f$ soit une symétrie orthogonale par rapport à un certain sous-espace vectoriel $W$, il faut et il suffit que $S$ soit à la fois symétrique et orthogonale.

**IV.A.2)** On suppose que $f$ est une symétrie orthogonale. Quelles sont les valeurs propres possibles (réelles ou complexes) pour $S$ ? Montrer que la symétrie orthogonale $f$ est un retournement si et seulement si la trace de $S$ est $-1$.

**IV.B** - *Étude préliminaire des rotations*

Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une autre base orthonormée directe de $E$ ; soient $\theta$ un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et $\rho$ la rotation d'angle $\theta$ autour de $\vec{K}$.

**IV.B.1)** Écrire la matrice $R$ de $\rho$ sur la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Quelles sont ses valeurs propres (réelles ou complexes) ?

**IV.B.2)** Pour quelles valeurs de $\theta$ deux de ces valeurs propres sont-elles opposées ? Pour chacune de ces valeurs de $\theta$, donner la liste des valeurs propres de la matrice $R$ avec leur ordre de multiplicité.

**IV.B.3)** Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque.

**a)** Pour $\theta = \pi/2$, montrer que $\rho(\vec{w})$ est le vecteur $(\vec{w} \cdot \vec{K})\vec{K} - (\vec{w} \wedge \vec{K})$ où $\vec{w} \cdot \vec{K}$ désigne le produit scalaire de $\vec{w}$ et de $\vec{K}$, et $\vec{w} \wedge \vec{K}$ leur produit vectoriel.

**b)** Trouver une écriture analogue dans le cas $\theta = -\pi/2$.

**IV.C** - *Matrices magiques de rotation*

On suppose que $u$ est une rotation mais n'est pas un retournement.

**IV.C.1)** Montrer que l'axe de cette rotation $u$ est nécessairement la droite dirigée par $\vec{v}$. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\theta$ de $u$ ?

**IV.C.2)** En utilisant IV.B.2, chercher, suivant la valeur de $\theta$, l'image par $u$ du vecteur dont les composantes sur $\mathcal{E}$ sont $(x_1, x_2, x_3)$. En déduire toutes les matrices magiques pour lesquelles $u$ est une rotation.

**IV.D** - *Matrices magiques orthogonales*

**IV.D.1)** Trouver toutes les matrices magiques $M$ telles que $u$ est un retournement. On cherchera $M$ sous la forme vue en III.A en déterminant les nombres $x$, $y$ et $z$.

**IV.D.2)** Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à $1$.

**IV.D.3)** Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à $-1$ (on remarquera que si $M$ est magique, $-M$ l'est aussi).

## Partie V - Matrices magiques symétriques d'ordre $n$

On suppose maintenant que $M$ est une matrice magique symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

**V.A** - Montrer que le vecteur colonne dont les $n$ coefficients sont égaux à $1$ est vecteur propre de $M$. Quelle est la valeur propre associée ?

**V.B** - Déterminer un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme $u$ associé à $M$.

**V.C** - Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ ayant les propriétés suivantes :

- les termes de la première colonne de $P$ sont tous égaux entre eux ;
- le premier terme diagonal de $D$ est $s(M)$ et la trace de $D$ est aussi $s(M)$ ;
- $M = PD{}^tP$.

**••• FIN •••**