On considère $\mathbb{R}^2$ comme plan affine euclidien, muni de son repère canonique orthonormal $(O;\vec{I},\vec{J})$. On considérera, en II.B, $\mathbb{R}^3$ comme espace affine euclidien, muni de son repère canonique orthonormal $(O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$. On donne enfin un scalaire $p>0$.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I -

Dans cette partie, on désire établir, en vue de II et III des propriétés de certaines familles de droites D_t. Les réponses aux questions de I.A ne sont pas nécessaires pour la suite du problème. La propriété essentielle, qui pourra être admise si nécessaire, est obtenue en I.B.2.

Soit un intervalle I, ni vide ni réduit à un point. On donne, pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, un polynôme à coefficients réels de la forme $P_i(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i$, et on considère la famille $\{D_t, t \in I\}$ de parties de $\mathbb{R}^2$ d'équation $P_1(t)x + P_2(t)y + P_3(t) = 0$.

I.A -

I.A.1) Soit la propriété (H_1) : pour tout t dans I, D_t est une droite. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les polynômes $P_i(t)$ pour qu'il en soit ainsi. (H_1) sera supposée vérifiée pour la suite.

I.A.2) Soit la propriété (H_2) : P_1 et P_2 sont non proportionnels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_t pour qu'il en soit ainsi.

I.A.3) Soit la propriété (H_3) : P_1, P_2 et P_3 forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_t pour qu'il en soit ainsi.

I.B - On appelle, pour t réel, $M(t)$ la matrice réelle $(3,3)$ dont la i–ème ligne, pour $i \in \{1,2,3\}$ est

$$(P_1^{(i-1)}(t), P_2^{(i-1)}(t), P_3^{(i-1)}(t))$$

I.B.1) Trouver, pour t réel, une matrice $M_1(t)$ telle que $M(t) = M_1(t) \times M_2$ où

$$M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

En déduire $\det(M(t))$ en fonction de $\det(M_2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction $t \longmapsto M(t)$ et équivalant à H_3. Pour la suite, on supposera H_3 également satisfaite.

I.B.2) Pour $t \in I$, on considère le système (S_t) :

$$S_t \quad \begin{cases} P_1(t)x + P_2(t)y + P_3(t) = 0 \\ P_1'(t)x + P_2'(t)y + P_3'(t) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe un ensemble fini F tel que pour $t \in I - F$, (S_t) ait une solution unique. On suppose désormais que $F \cap I = \varnothing$.

b) Montrer qu'il existe trois polynômes réels A_1, A_2, δ de degré ≤ 2 tels que pour $t \in I$, l'unique solution de (S_t) soit

$$\left(x(t) = \frac{A_1(t)}{\delta(t)} \quad , \quad y(t) = \frac{A_2(t)}{\delta(t)} \right).$$

Montrer que l'arc $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$ est de classe C^{∞}.

c) En écrivant en particulier que, pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t))$ vérifie (S_t), étudier successivement :

- la régularité de l'arc γ,
- la tangente à γ en un point régulier $\gamma(t)$, à l'aide de la droite D_t.

d) L'arc γ peut-il être inclus dans une droite ? Montrer que l'arc γ est inclus dans la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$(b_1 x + b_2 y + b_3)^2 - 4(a_1 x + a_2 y + a_3)(c_1 x + c_2 y + c_3) = 0 \qquad (1)$$

e) Que peut-on conclure à partir de (1), quant à la nature de γ ?

Partie II -

II.A - Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = O + t\vec{I} - p\vec{J}$.

II.A.1) Soit D_t la droite passant par M_t et orthogonale à la droite OM_t. Donner une équation de D_t sous la forme $a(t)X + pY + b(t) = 0$.

II.A.2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $N \in \mathbb{R}^2$ par lesquels passent deux droites D_{t_0} et D_{t_1} distinctes. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $t_0 \times t_1$ pour que ces deux droites soient orthogonales. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points N par lesquels passent deux droites orthogonales de la famille D_t ?

II.A.3) Montrer que les droites D_t sont les tangentes à une parabole P dont on donnera une équation cartésienne. Que représente $\mathcal{E}'$ pour P ?

II.B - Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $D_{t,\alpha}$ la droite passant par $M_t(t, -p, 0)$ et dirigée par

$$\overrightarrow{U_{t,\alpha}} = p\vec{I} + t(\vec{J} - \operatorname{cotan}\alpha \vec{K})$$

On note

$$K_{t,\alpha} = M_t + \frac{t}{p}\overrightarrow{U_{t,\alpha}}$$

II.B.1) Donner un scalaire β tel que, pour tout couple (t,α),

$$\frac{\partial \overrightarrow{OK_{t,\alpha}}}{\partial t} = \beta \overrightarrow{U_{t,\alpha}}$$

Pour $\alpha \in]0,\pi[$ fixé, on note T_α la courbe paramétrée $t \longmapsto K_{t,\alpha}$, $t \in \mathbb{R}$. Que représente $D_{t,\alpha}$ pour T_α ?

II.B.2) Quelle est la projection orthogonale de T_α sur le plan Oxy ? Montrer que T_α est dans un plan Π_α contenant la droite Δ d'équations $(y = -p \ , \ z = 0)$.

II.B.3) On note F_α la projection orthogonale de O sur Π_α et D_α la droite déduite de Δ par l'homothétie de centre F_α et de rapport 2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,\pi[$ donnés, exprimer les distances

$$\left\| \overrightarrow{F_\alpha K_{t,\alpha}} \right\|$$

et

$$d(K_{t,\alpha}, D_\alpha)$$

Conclure quant à la nature des courbes T_α. Comment l'expliquer grâce à II.A ? (On remarquera que $\langle \overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{U_{t,\alpha}} \rangle = 0$).

II.B.4) Quel est l'ensemble des points F_α, pour $\alpha \in]0,\pi[$? Quelle est la surface engendrée par les droites D_α ? Comment $D_\alpha \cap Oyz$ se déduit-elle de F_α ?

Partie III -

III.A - Pour $t \in \mathbb{R}$, on appelle C_t le cercle d'équation

$$X^2 + Y^2 - 2ptX - p(t^2 - 1)Y = 0$$

On appelle Ω_t le centre de C_t ; calculer les distances $d(O,\Omega_t)$ et $d(\Omega_t,\Delta)$. En déduire la position relative de C_t par rapport à Δ d'équations $(y = -p,\ z = 0)$. Discuter soigneusement le nombre de cercles C_t passant par un point $A \in \mathbb{R}^2$.

III.B - Soit t et u deux réels distincts ; on pose $\Sigma = t + u$ et $\Pi = t \times u$.

III.B.1) Donner une relation (R) entre Σ et Π équivalant à $\overrightarrow{O\Omega_t} \perp \overrightarrow{O\Omega_u}$.

III.B.2) Trouver deux scalaires A et B tels que (Σ,Π) vérifie (R) si et seulement si

$$\exists \omega \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ tel que } \Sigma = 2\sqrt{2}\tan\omega,\ \Pi = A + \frac{B}{\cos\omega}$$

III.C -

III.C.1) Trouver une fonction Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'une équation de la droite $\Omega_t\Omega_u$ soit, pour $t \neq u$, de la forme $\Sigma X - 2(Y - p) = \Phi(\Pi,p)$.

III.C.2) Soit E l'ellipse d'équation $2X^2 + (Y - p)^2 = 2p^2$; préciser le centre et les foyers de E ; donner une équation polaire de E.

III.C.3) En introduisant

$$T = \tan\frac{\omega}{2},$$

montrer que la droite $\Omega_t\Omega_u$ est tangente à E lorsque (Σ,Π) vérifie (R).

III.C.4) Pour un tel couple, calculer la distance $\left\|\overrightarrow{GM}\right\|$, où G est le point $(0, 2p)$ et M le symétrique de O par rapport à la droite $\Omega_t\Omega_u$.

III.C.5) Quel est l'ensemble des points M du plan par lesquels passent deux cercles C_t et C_u orthogonaux ? (On dit que deux cercles ni vides ni réduits à des points sont orthogonaux s'ils sont sécants et si les tangentes à ces cercles en un point d'intersection quelconque sont orthogonales.)

• • • FIN • • •
