

I

I.A Ecoulement laminaire d'un fluide visqueux suivant Ox, la norme de vitesse dépendant de z, la pression dépendant de z par la pesanteur et de x par viscosité.

La vitesse du fluide le long des parois horizontales doit être égale à la vitesse de ces parois. Par contre, on considère que le fluide glisse sur les parois verticales.

Accélération particulaire convective : $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = v(z,t) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{0}$

I.B Bilan de quantité de mouvement d'un parallélépipède dx.dy.dz dont on suit le mouvement (conception eulérienne) pendant le temps dt :

- variation de quantité de mouvement : $D\vec{p} = \rho \cdot d\tau \cdot \vec{v}(t + dt) - \rho \cdot d\tau \cdot \vec{v}(t) = \rho \cdot d\tau \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$

- bilan des forces de pression : - **grad** p.dτ

- bilan des forces de viscosité : $\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z+dz} \vec{e}_x \cdot dx \cdot dy - \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_z \vec{e}_x \cdot dx \cdot dy = \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} d\tau$

- poids : $\rho \vec{g} \cdot d\tau$

On écrit alors le Principe Fondamental de la dynamique :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \Sigma \vec{F} \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\tau = -\overline{\text{grad}} p \cdot d\tau + \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} d\tau + \rho \vec{g} \cdot d\tau$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overline{\text{grad}} p + \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} + \rho \vec{g}$$

En projection sur l'axe des x : $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

sur l'axe des z : $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$

I.C L'écoulement étant stationnaire $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, donc : $\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Le second membre ne

dépend pas de x, donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est une constante par rapport à x; ainsi, p dépend linéairement de x à z donné.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \quad \text{donc : } p_{(z=0)} = p_1 - \frac{\Delta p}{L} x$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{donc : } p(x, z) = -\rho g z + f(x)$$

La synthèse de ces deux lignes donne : $p(x, z) = p_1 - \rho g z - \frac{\Delta p}{L} x$

Dans les plans d'abscisses x, la pression suit la loi de l'hydrostatique.

I.D 1 - Pour que le fluide s'écoule dans le sens de \vec{e}_x , il faut que $\Delta p > 0$.

2 - A partir de $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$, par intégration : $\eta \cdot v(z) = -\frac{\Delta p}{2L} z^2 + \alpha z + \beta$

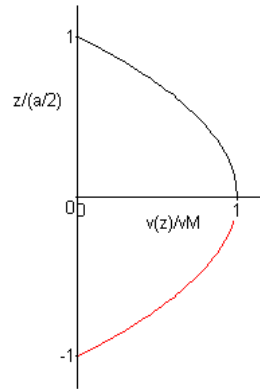
Avec les conditions aux limites ($v=0$ en $z = \pm \frac{a}{2}$), on détermine les constantes α et β .

$$v(z) = \frac{\Delta p}{2L\eta} \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right)$$

dont la valeur maximale est :

$$v_M = \frac{\Delta p}{2L\eta} \frac{a^2}{4}$$

et la valeur moyenne : $v_m = \frac{2}{3} v_M$



3 - $D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = \rho b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v \cdot dz$ $D_m = \rho a b v_m$

4 - Les forces de viscosité exercées par le fluide sur les deux parois horizontales sont égales par symétrie des relations; donc la force totale (somme des deux) est :

$$F = 2 \iint \eta \frac{\partial v}{\partial z} dx \cdot dy \quad \text{or : } \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L\eta} z = -\frac{\Delta p}{L\eta} \frac{a}{2} \quad \text{donc : } F = -\frac{\Delta p}{L} a \iint dx \cdot dy$$

$$\vec{F} = -ab \cdot \Delta p \cdot \vec{e}_x$$

En régime stationnaire, la quantité de mouvement du fluide contenu dans le pavé de côtés L, b, a est constante dans le temps; la somme des forces est donc nulle. En projection sur l'axe Ox , n'interviennent que les forces de viscosité et les forces de pression sur les deux sections aux abscisses a, b ; on obtient, tout calcul fait : $F = -ab \cdot \Delta p$

I.E. 1 - L'intégration de l'équation $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$ se fait comme en I.D.2

$$\eta \cdot v(z) = -\frac{\Delta p}{2L} z^2 + \alpha z + \beta$$

en $z = -\frac{a}{2}$ $v = 0$ donc : $0 = -\frac{\Delta p}{2L} \frac{a^2}{4} - \alpha \frac{a}{2} + \beta$

en $z = \frac{a}{2}$ $v = v_0$ donc : $\eta \cdot v_0 = -\frac{\Delta p}{2L} \frac{a^2}{4} + \alpha \frac{a}{2} + \beta$

qui permettent d'atteindre les constantes d'intégration α et β :

et d'écrire : $v(z) = \frac{\Delta p}{2L\eta} \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right) + v_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{a} \right)$

Le profil de vitesse résulte à la fois du gradient de pression et du déplacement de la paroi supérieure. Ce profil reste parabolique, mais il n'est plus symétrique.

Si $\Delta p = 0$, le profil de vitesse est linéaire, induit par le déplacement de la plaque (écoulement de Couette)

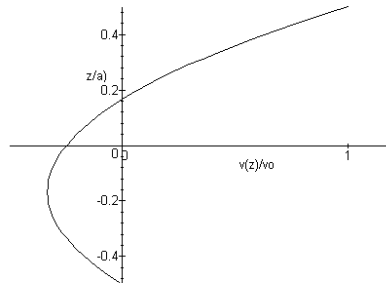
2 - On calcule d'abord le débit massique à travers ab :

$$D_m = \rho \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v \cdot dz = \rho ab \left(\frac{\Delta p}{2L\eta} \frac{a^2}{6} + \frac{v_0}{2} \right)$$

Ce débit massique est nul lorsque :
$$v_0 = -\frac{\Delta p}{2L\eta} \frac{a^2}{3}$$

3 - L'expression de $v(z)$, dans le cas où le débit massique est nul, est :

$$v(z) = v_0 \left(3 \frac{z^2}{a^2} + \frac{z}{a} - \frac{1}{4} \right)$$



4 - Force exercée sur la plaque mobile :
$$F = \iint_{z=\frac{a}{2}} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx \cdot dy$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=\frac{a}{2}} = v_0 \left(6 \frac{a}{2a^2} + \frac{1}{a} \right) = \frac{4v_0}{a}$$
 reportée dans l'expression de F conduit à :

$$\vec{F} = \eta \frac{4v_0}{a} bL \cdot \vec{e}_x$$

I.F Dans le cas d'un fluide idéal en écoulement stationnaire, un gradient de pression n'est pas nécessaire. Dans ce cas, l'écoulement est uniforme, la variation de pression y étant hydrostatique. Le mouvement de la paroi n'a aucune influence.

II

II.A La loi d'Ohm locale permet d'écrire :
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0 = \frac{\gamma U}{b} \vec{e}_y$$

Dans cette seule configuration, aucune force ne s'exerce sur les particules fluides autre que le poids et le gradient de pression vertical. Le liquide ne peut se mettre en mouvement.

II.B L'application d'un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ fait agir une force de Laplace sur chaque particule fluide :
$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \cdot d\tau = \frac{\gamma}{b} UB_0 \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \cdot d\tau = \frac{\gamma}{b} UB_0 \vec{e}_x \cdot d\tau$$

Sous l'action de la force de Laplace, le liquide se met en mouvement suivant \vec{e}_x .

II.C Les charges de conduction du liquide sont entraînées suivant Ox dans le champ magnétique \vec{B}_0 vertical; il en résulte un courant induit suivant Oy. Le courant total est la somme des courants de conduction et induit tous deux selon Oy :

\vec{j} est dirigé selon Oy.

Le champ magnétique est la somme du champ \vec{B}_0 et du champ créé par le courant qui, lui étant orthogonal, doit posséder une composante selon Ox :

\vec{B} appartient au plan Oxz

Au champ électrostatique \vec{E}_0 s'ajoute le champ électromoteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$. Avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, on écrira :
$$\vec{j} = \gamma (\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

En régime stationnaire :
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

En coordonnées cartésiennes, avec $\vec{j} = j(z)\vec{e}_y$, $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_z\vec{e}_z$ et $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$$\vec{j} = \gamma(E_0 - vB_z)$$

div $\vec{B} = 0$ permet d'écrire : $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ donne : $\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 j$

Comme B_x ne dépend pas de x , $\text{div } \vec{B} = 0$ montre onc que B_z ne dépend pas de z ; par conséquent, le champ créé par le courant \vec{j} ne peut avoir de composante suivant z , de sorte que B_z est constitué par le seul champ B_0 . On écrira donc que :

$$\vec{j} = j(z)\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = B(z)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_z$$

Le plan Oxy ($z = 0$) est un plan de symétrie des causes (sources de \vec{E}_0 et sources de \vec{B}_0); il est donc un plan de symétrie des effets, donc : $j_y(-z) = j_y(z)$ $v(-z) = v(z)$ et, par son caractère axial : $B_x(-z) = -B_x(z)$

$j(x)$ est donc une fonction paire et $B(z)$ une fonction impaire de z .

II.D Le bilan de quantité de mouvement, établi en I.B, doit tenir compte de la force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}.d\tau$ exercée sur le fluide, soit $\gamma(E_0 - vB_0)\vec{e}_y \wedge (B\vec{e}_x + B_0\vec{e}_z).d\tau$, dont la composante suivant x est $\gamma B_0(E_0 - vB_0).d\tau$, de sorte qu'en régime stationnaire :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma B_0(E_0 - vB_0)$$

On prend le gradient de pression nul selon Ox. Cela se justifie dans la mesure où le champ \vec{B}_0 est responsable d'une mise en mouvement du fluide traversé par le courant de conduction; après une phase transitoire, un régime stationnaire peut s'établir.

II.E On écrira donc : $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \gamma B_0^2 v = -\gamma B_0 E_0$

qu'on divise par η pour obtenir : $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{z_0^2} v = -\frac{w_0}{z_0^2}$

La solution complète de cette équation est : $v = w_0 + Ae^{-\frac{z}{z_0}} + Be^{\frac{z}{z_0}}$

Pour déterminer A et B nous écrivons que v s'annule en $z = \pm \frac{a}{2}$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= w_0 + Ae^{-\frac{a}{2z_0}} + Be^{\frac{a}{2z_0}} \\ 0 &= w_0 + Ae^{\frac{a}{2z_0}} + Be^{-\frac{a}{2z_0}} \end{aligned} \right\} A = B = -\frac{w_0}{\cosh \frac{a}{2z_0}}$$

d'où :
$$v = w_0 \left(1 - \frac{\cosh \frac{z}{z_0}}{\cosh \frac{a}{2z_0}} \right)$$

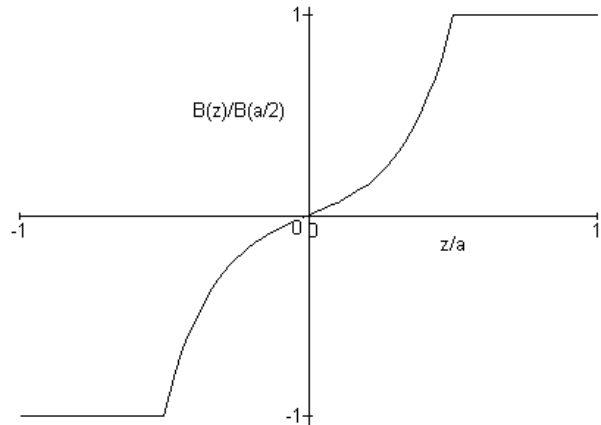
II.F A l'extérieur, c'est-à-dire pour $z \leq -\frac{a}{2}$ et $z \geq \frac{a}{2}$: $\text{rot } \vec{B} = 0$, donc : $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$ de sorte que $B_x = \text{const}$ obtenue par continuité aux frontières.

A l'intérieur, on reporte l'expression de $v(z)$ dans l'équation $\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0 \gamma (E_0 - vB_0)$

pour obtenir
$$\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0 \gamma E_0 \frac{\cosh \frac{z}{z_0}}{\cosh \frac{a}{2z_0}}$$

qu'on intègre, compte tenu que $B(z)$ est une fonction impaire (qui s'annule en $z = 0$)

$$B(z) = \mu_0 \gamma E_0 z_0 \frac{\sinh \frac{z}{z_0}}{\cosh \frac{a}{2z_0}}$$



II.G
$$\vec{j} = \gamma (E_0 - vB_0) = \gamma E_0 \frac{\cosh \frac{z}{z_0}}{\cosh \frac{a}{2z_0}}$$

On calcule $i = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_{-a/2}^{a/2} j \cdot dz$ pour une unité de longueur selon Ox . On obtient :

$i = 2\gamma E_0 z_0 \tanh\left(\frac{a}{2z_0}\right)$. En l'absence de \vec{B}_0 ; $i_0 = \gamma E_0 a$ d'où :
$$i = i_0 \frac{\tanh H}{H}$$

II.H. 1 -
$$z_0 = \frac{1}{45.10^{-3}} \sqrt{\frac{8,3.10^{-3}}{0,38.10^{-9}}} \quad \underline{z_0 = 1,04.10^5 \text{ m}}$$

Avec $a = 0,18 \text{ mm}$, $\frac{a}{2z_0} = H \ll 1$, on prendra donc un développement limité de \cosh :

$$\cosh\left(\frac{z}{z_0}\right) = 1 + \frac{z^2}{2z_0^2}$$

$$v = w_0 \left(1 - \frac{1 + \frac{z^2}{2z_0^2}}{1 + \frac{a^2}{2(2z_0)^2}} \right) = w_0 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2z_0}\right)^2 \right] \quad \boxed{v = \frac{1}{2} w_0 \frac{a^2 - z^2}{z_0^2}}$$

Valeur maximale de la vitesse :
$$v_M = \frac{1}{2} \frac{45.10^3}{2,5.10^{-3} \cdot 45.10^{-3}} \left(\frac{0,18.10^{-3}}{2,1,04.10^5}\right)^2 \quad \underline{v_M = 1,5.10^{-10} \text{ m/s}}$$

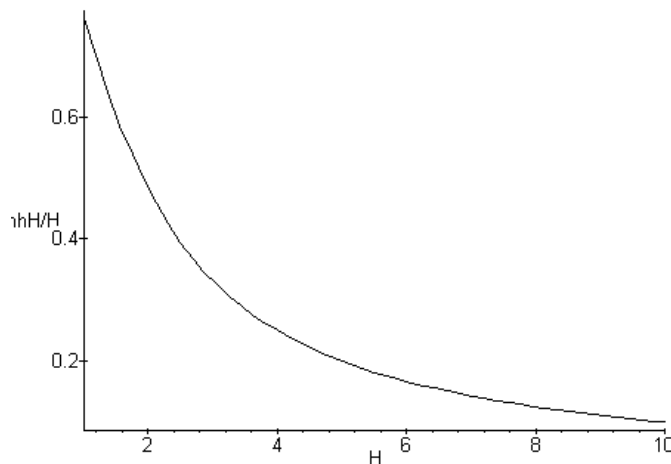
On constate que le fluide se déplace très lentement.

$$2 - i_0 = \gamma E_0 a = 0,38 \cdot 10^{-9} \frac{45 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-3}} 0,18 \cdot 10^{-3} \quad \underline{i_0 = 1,23 \mu\text{A} / \text{m}}$$

La surface d'électrode sur une unité de Ox est de $1,8 \text{ cm}^2$. Pour une surface de 10 cm^2 , on obtient $i_0 = 6,84 \mu\text{A}$. La valeur expérimentale de $1,9 \mu\text{A}$ est du même ordre de grandeur que la valeur théorique.

3 - Représentation graphique de $\frac{\tanh H}{H}$

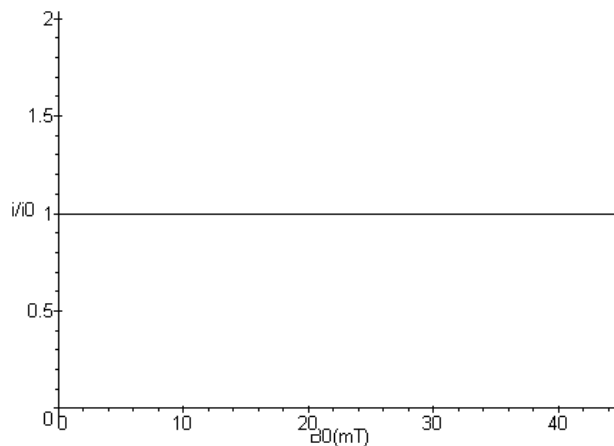
le domaine des valeurs de H est complètement différent.



La courbe ressemble à la courbe expérimentale mais

$$4 - k = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} = \frac{0,18 \cdot 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{0,38 \cdot 10^{-9}}{8,3 \cdot 10^{-3}}} = 1,926 \cdot 10^{-8} \text{ T}^{-1} \quad \underline{k = 1,926 \cdot 10^{-11} \text{ mT}^{-1}}$$

Courbe théorique de i/i_0 dans le domaine (0,45 mT) :



On constate que la courbe théorique montre une valeur de i/i_0 pratiquement égale à 1, comme si l'influence de B_0 était imperceptible. Différent de la courbe expérimentale.

III

III.A Prenons le $\text{rot} \vec{t}$ de $\vec{g} \text{ rad } p = \rho \vec{g}$:

$$\text{rot}(\vec{g} \text{ rad } p) = 0 = \text{rot}(\rho \vec{g}) = \rho \cdot \text{rot} \vec{g} + \vec{g} \text{ rad } \rho \wedge \vec{g}$$

Comme le $\text{rot} \vec{g}$ est nul, il en résulte que $\vec{g} \text{ rad } \rho \wedge \vec{g} = 0$, donc les surfaces de masse volumique constante (normales à $\vec{g} \text{ rad } \rho$) sont normales à \vec{g} tout comme les surfaces isobares.

Un fluide non barotrope est en équilibre dans le champ de pesanteur s'il est homogène, sinon il ne peut pas être en équilibre.

III.B $d\rho = -\alpha\rho.dT$. En considérant que ρ varie peu avec T : $\rho - \rho_0 = -\alpha\rho_0(T - T_0)$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha(T - T_0) \right]$$

IV

IV.A 1 - T varie avec x suivant la loi : $T = T_0 + \frac{\theta}{a}x$ qu'on reporte dans la relation du III.B :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha \frac{\theta}{a} x \right]$$

2 - Avec un champ de pesanteur vertical, l'équilibre du fluide implique des surfaces d'égale masse volumique horizontales, ce qui n'est pas le cas.

La mise en mouvement des couches de fluide ne peut se faire qu'avec les forces de viscosité.

L'écoulement du fluide se fait dans le sens vertical, ascendant d'un côté et descendant de l'autre.

IV.B 1 Les plaques étant considérées illimitées, il y a invariance des grandeurs suivant y et z , donc T n'est fonction que de x . Dans ces conditions, en régime stationnaire, l'équation de transport thermique se réduit à $\Delta T = 0$ qui conduit à la loi linéaire : $T = T_0 + \frac{\theta}{a}x$

2 - En régime stationnaire, le bilan des forces amène à écrire :

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} = 0$$

que nous projetons selon Oz :
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

3 - Le champ de pression est le même que pour le fluide isotherme à T_0 : $\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p = \vec{g}$ donc

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \text{ qu'on reporte dans l'équation précédente : } \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

En prenant l'expression de ρ du IV.A.1 : $\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \alpha \frac{\theta}{a} x$ au second ordre près, donc :

$$\alpha \frac{\theta}{a} x g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g \frac{\alpha \theta}{\nu a} x = 0 \right] \text{ On posera : } K = \frac{\alpha \theta}{\nu a} g$$

4 - On intègre avec $v = 0$ en $x = \pm \frac{a}{2}$

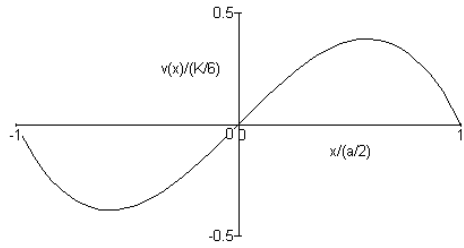
$$v = -\frac{K}{6} x^3 + Ax + B$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \quad 0 = -\frac{K}{6} \left(\frac{a}{2} \right)^3 - A \frac{a}{2} + B \\ x = \frac{a}{2} \quad 0 = -\frac{K}{6} \left(\frac{a}{2} \right)^3 + A \frac{a}{2} + B \end{array} \right\} B = 0 \text{ et } A = \frac{K}{6} \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

$$v(x) = \frac{K}{6} x \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right]$$

L'écoulement est rotationnel puisque :

$$\vec{rot} \vec{v} = -\frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_y \text{ est non nul}$$



V

V.A Equilibre possible car les surfaces isobares coïncident avec les surfaces isothermes donc de masse volumique constante. Mais, l'équilibre est instable si le centre de poussée d'Archimède d'une particule fluide se trouve au-dessous de son centre de gravité.

V.B. 1 - Pendant τ , la boule s'est déplacée de $\delta z = v\tau$ vers le haut. La différence entre la température de la boule et celle du fluide est alors :

$$T(z) - T(z + dz) = \delta T = -\frac{\partial T}{\partial z} \delta z \quad \boxed{\delta T = \frac{\theta}{a} v\tau}$$

Comme la température de la boule est plus élevée que celle du fluide, la masse volumique de la boule est plus faible que celle du fluide : $\delta\rho = -\rho_0\alpha\delta T = -\rho_0\alpha\frac{\theta}{a}v\tau$. La poussée

d'Archimède $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ est donc plus grande que son poids, et la force qui s'exerce sur la boule

$$\text{est : } F = -\frac{4}{3}\pi r^3 g \cdot \delta\rho \quad \boxed{\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_0 \alpha \frac{\theta}{a} v\tau \vec{e}_z}$$

2 - La vitesse \vec{v} de la boule augmentera si cette force motrice est supérieure à la force de viscosité de Stokes; le critère d'instabilité est donc : $\|\vec{F}\| > \|\vec{F}_v\|$

Si la particule est descendante, le raisonnement reste valable avec des signes opposés, mais les normes des forces sont inchangées.

$$\text{Donc : } \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_0 \alpha \frac{\theta}{a} v A \frac{r^2}{K} > 6\pi\eta r v \quad \text{conduit à : } r^4 g \alpha \frac{\theta}{a} > \frac{9}{2a} \frac{\eta}{\rho_0} K$$

$$\text{donc : } \mathcal{R}_a > \mathcal{R}_{ac} = \frac{72}{A}$$

3 - $\mathcal{R}_{ac} = 1714$

$$\frac{a^3 g \alpha \theta}{v K} > 1714 \quad \text{conduit à : } \underline{\theta > 1,714 K}$$

V.C. 1 - Dans l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ on tient compte que

$p(x, z, t) = p_e(z) + \delta p(x, t)$ donc : $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_e}{\partial z} = -\rho_e g$ d'après l'énoncé. L'équation devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1 \right) g + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Avec $\rho(x, z, t) = \rho_e(z) + \delta\rho(x, t)$: $\left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1\right) = -\frac{\delta\rho}{\rho} = \alpha \cdot \delta T$ par définition du coefficient de

dilatation. Finalement :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha g \cdot \delta T + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Dans l'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ nous écrivons : $T(x, z, t) = T_e(z) + \delta T(x, t)$

avec $T_e(z) = T_0 - \frac{\theta}{a} z$ de sorte que $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_e}{\partial z} = -\frac{\theta}{a}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$. D'où :

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} + v \frac{\theta}{a}$$

2 - La fonction $v(x, t)$ ne vérifie pas les conditions aux limites sur les parois horizontales $z = \pm \frac{a}{2}$

Le facteur $\cos xh$ rend compte de la périodicité des rouleaux et que ceux-ci sont circulaires de diamètre a .

En portant dans les équations de V.C.1 les fonctions $v = v_0 e^{st} \cos xh$ et $\delta T = \delta T_0 e^{st} \cos xh$, on obtient :

$$\begin{cases} (s + \kappa h^2) \delta T_0 = v_0 \frac{\theta}{a} \\ (s + \kappa h^2) v_0 = \alpha g \cdot \delta T_0 \end{cases}$$

En éliminant δT_0 et v_0 , on obtient l'équation du second degré :

$$s^2 + h^2(v + \kappa) + h^4 v \kappa - \alpha g \frac{\theta}{a} = 0$$

3 - Pour que le fluide se mette en mouvement, il faut que $s > 0$ afin que la vitesse croisse avec le temps.

A la limite $s = 0$, on obtient : $h^4 v \kappa - \alpha g \frac{\theta}{a} = 0$ soit, avec $h = \frac{\pi}{a}$:

$$\mathcal{R}_{ac} = \frac{\alpha \theta g a^3}{v \kappa} = \pi^4 = 97,4$$

La valeur minimale de θ est $\theta = \pi^4 \frac{v \kappa}{\alpha g a^3}$ soit : $\theta_m = 0,10 \text{ K}$

4 - La valeur expérimentale \mathcal{R}_{ac} voisine de 1700 conforte la valeur trouvée en V.B.3, mais montre que les approximations faites en V.C sont plutôt éloignées de la réalité.