

Lévitiation de petits objets

19 mai 1998

Partie I Lévitiation électrique

A Etude de la résonance

1. La loi des mailles peut s'écrire

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + u_c$$

avec $i = C \frac{du}{dt}$ soit

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

En introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q , on obtient :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du_c}{dt} + u_c = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

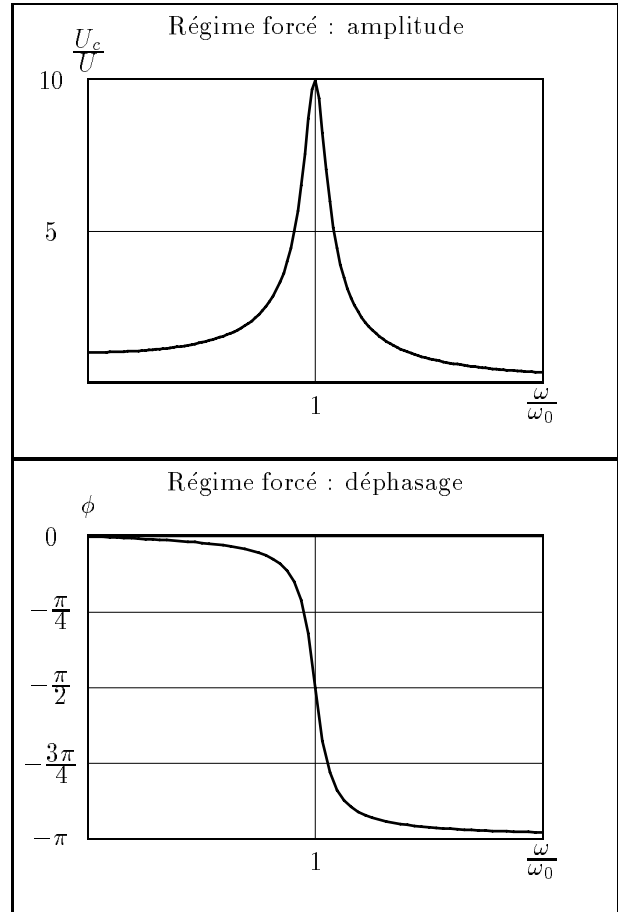
2. Posons $\underline{u}_c = U_c \sqrt{2} e^{j(\omega t + \phi)}$; l'équation différentielle impose

$$U_c e^{j\phi} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right) = U$$

ce qui détermine

$$\begin{cases} U_c = \frac{U}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \\ \phi = -\text{Arccos} \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \right) \end{cases}$$

La courbe représentant l'amplitude du régime forcé pour $Q = 10$ montre que le facteur de qualité représente la valeur maximale du rapport $\frac{U_c}{U}$; c'est pour cela qu'on l'appelle également *facteur de surtension*. Q représente également la finesse de la courbe de résonance $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ et, énergétiquement, $2\pi \frac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie dissipée}}$.



3. a) Les valeurs numériques conduisent à $Q = 10 \pm 1$, ce qui est incompatible avec $Q = 7 \pm 0,5$.

Le générateur BF n'est pas une source idéale de tension ; si on prend en compte la résistance interne (typiquement 50Ω), on obtient $Q = 6,7 \pm 1$, ce qui est compatible avec l'autre mesure.

b) Si l'évolution de ϕ est conforme aux calculs précédents, on observe

- pour $\omega \ll \omega_0$ un segment de droite de pente positive ($\phi \simeq 0$);
- pour $\omega \simeq \omega_0$ une ellipse d'axes parallèles aux bords d'écran;
- pour $\omega \gg \omega_0$ un segment de droite de pente négative ($\phi \simeq -\pi$)

4. a) Représentations graphiques

La force électrostatique s'écrit alors

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\epsilon_0 S U_c^2}{2e^2} \vec{u}_z.$$

3. a) La longueur d'onde λ est supérieure au kilomètre, donc très grande devant les dimensions du condensateur, ce qui justifie l'ARQS.

b) La force électrostatique devient

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\epsilon_0 S u_c(t)^2}{2e^2(t)} \vec{u}_z.$$

L'équation différentielle du mouvement devient

$$m \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = mg - \frac{\epsilon_0 S u_c(t)^2}{2e^2(t)}.$$

c) On peut remplacer $u_c(t)^2$ par U_c^2 si la période du signal électrique est petite devant la durée caractéristique du mouvement.

4. L'équation différentielle approchée étant

$$m \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = mg - \frac{\epsilon_0 S U_c^2}{2e^2(t)},$$

il y a équilibre pour

$$e = \sqrt{\frac{\epsilon_0 S}{2mg}} U_c.$$

Au voisinage de la position d'équilibre, on a, en posant $e = e_0 + \eta$:

$$\frac{1}{e^2} \simeq \frac{1}{e_0^2} \left(1 - \frac{2\eta}{e_0} \right);$$

l'équation différentielle devient alors

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{2g}{e_0} \eta = 0$$

ce qui est typique d'un équilibre instable.

b) Chacun des A.O. est utilisé dans un montage *sui-veur*.

c) On doit avoir $\frac{1}{\omega_{min}} \ll R_3 C_3 \ll \tau$.

Si $R_3 C_3$ est trop grand, la courbe de résonance est déformée : C_3 n'a pas le temps de se charger et de se décharger pendant une période de wobulation.

Si $R_3 C_3$ est trop petit, on n'élimine plus les oscillations de haute fréquence.

B Etude d'un condensateur seul

1. a) La discontinuité du champ à la traversée de la couche chargée (2) étant $2\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$, on a $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$.

b) La force électrostatique est

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

2. Le champ total est

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

La tension est

$$U_c = \vec{E} \cdot \vec{u}_z = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{q e}{\epsilon_0 S}.$$

En identifiant avec $U_c = \frac{q}{C}$, on obtient

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

C Etude du condensateur dans le circuit résonnant

1. L'équation différentielle approchée devient

$$m \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = mg - \frac{\epsilon_0 S U_c^2}{2e^2(t)} \frac{1}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}.$$

Si e augmente, la capacité diminue et la pulsation propre augmente.

- pour $\omega < \omega_0$: ω_0 augmente ; U_c diminue ; la force électrostatique diminue ; l'équilibre est donc instable.
- pour $\omega > \omega_0$: ω_0 diminue ; U_c augmente ; la force électrostatique peut augmenter ; l'équilibre peut donc devenir stable.

$$2. \ddot{x} = 1 - \frac{k}{1 + (x-1)^2}.$$

a)

- A est une position d'équilibre stable ;
- B est une position d'équilibre instable ; c'est un point double de la courbe S qui sépare le plan de phase en deux régions :
 - une région où il existe des positions d'équilibre stable ;
 - une région où il n'y a pas de position d'équilibre ;
- D est, comme B , une position d'équilibre instable ;
- C est un point représentant une situation de contact entre les armatures, état initial d'une trajectoire de phase qui se poursuit par une chute de l'armature inférieure.

b) La symétrie par rapport à l'axe Ox des trajectoires de phase montre que celles-ci sont invariantes par changement de signe de la vitesse, ce qui traduit la réversibilité mécanique du système.

c) Pour $x \gg 1$ et $x^2 \gg k$, on a $\ddot{x} \simeq 1$; la trajectoire de phase est alors une parabole d'axe Ox ; le mouvement asymptotique est un mouvement de chute libre.

3. A l'équilibre, on a $k = 1 + (x-1)^2$, ce qui n'est possible que pour $k > 1$. Ceci est en accord avec les diagrammes de phase présentés.

4. On doit avoir $k < 2$, sinon la position d'équilibre se situe dans le domaine $x < 0$ qui n'a pas de signification physique.

La position d'équilibre est déterminée par

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 \pm \sqrt{k-1} \right)$$

Au voisinage de cette position d'équilibre, en posant $x = x_{eq} + \xi$, on a

$$\ddot{\xi} = 1 - \frac{k}{1 + (x_{eq} + \xi - 1)^2}$$

soit, à l'ordre 1 :

$$\ddot{\xi} = -\frac{2(x_{eq} - 1)}{1 + (x_{eq} - 1)^2} \xi.$$

On voit que la stabilité est assurée pour $x_{eq} < 1$, soit pour

$$\epsilon_{eq} < \epsilon_0$$

ce qui donne, en explicitant ϵ_{eq} et ϵ_0 :

$$\frac{\epsilon_0 S}{C_{eq}} < \epsilon_0 S L \omega^2$$

soit

$$\omega > \omega_0$$

en accord avec la discussion qualitative précédente.

Partie II Lévitation d'une bille diélectrique dans un faisceau Laser

A

Avec le faisceau laser seul, on a une tache de 1 mm de rayon environ. Avec une bille dans le faisceau, il y a diffraction de Fraunhofer ($\delta^2 \ll D\lambda$) ; on observe une tache d'Airy bordée d'anneaux (pupille complémentaire d'un disque) ; la taille caractéristique est de l'ordre de $1,22\lambda D/\delta \simeq 7,2$ cm.

B

La bille est collée sur le support à cause des forces attractives à courte portée (forces de Van der Waals) s'exerçant entre la bille et le support ; la mise en mouvement de la céramique permet de faire décoller la bille.

C

1. $N_1 > N_2$.

2. La variation de quantité de mouvement des photons du rayon (1) est dirigée vers le bas, tandis qu'elle est dirigée vers le haut pour les photons du rayon (2) ; comme $N_1 > N_2$, il n'y a pas compensation ; globalement, la variation de quantité de mouvement des photons déviés par la bille est dirigée vers le bas ; la force exercée par le faisceau sur la bille est donc dirigée vers le haut ; il s'agit donc d'un rappel vers le centre du faisceau.

3. Quand z augmente, la densité de photons diminue ; la composante verticale de la force diminue ; le poids l'emporte alors et fait diminuer z ; il y a donc stabilité verticale.

D

La force est proportionnelle à la surface et à la puissance du laser, soit

$$F = kP\delta^2.$$

Dans les conditions de l'équilibre, la force doit s'opposer au poids, donc être proportionnelle à la masse, soit

$$F = k'\delta^3.$$

On en déduit que la puissance doit être proportionnelle à δ .

E

une grande valeur de n favorise la stabilité latérale.

F

Pour $n < n_0$, les déviations des rayons changent de sens ; la stabilité latérale est détruite.

G

Claude COHEN TANNOUDI (Nobel 97) dirige l'équipe travaillant à l'ENS sur le refroidissement des atomes.

Partie III Lévitation magnétique

A

Le moment des efforts oriente \vec{M} parallèlement au champ et la force attire (A) dans une région de champ fort.

B

Sur l'axe, la densité de courant est nulle. Les équations de Maxwell se réduisent à

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

En effectuant, on obtient successivement

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} (b_2 z + b_4 z^2) + (2b_1 + a_2) + r(3b_3 + a_5) + 2z(b_5 + a_5)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} b_2 = b_4 = 0 \\ b_1 = -\frac{a_2}{2} \\ b_3 = -\frac{a_5}{3} \\ b_5 = -a_4 \end{cases}$$

puis

$$\operatorname{rot} \vec{B} = [-a_1 + (b_5 - 2a_3)r + a_5 z] \vec{u}_\theta$$

qui donne

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_5 = 0 & \text{donc } b_3 = 0 \\ b_5 = 2a_3 & \text{donc } a_3 = -\frac{a_4}{2} \end{cases}$$

Il reste

$$\begin{cases} B_z = B_0 + a_2 z + a_4 \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ B_r = -\frac{a_2}{2} r - a_4 r z \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_2 = \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{O'} \\ a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right)_{O'} \end{cases}$$

C Approximation gyroscopique

1. Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \mathcal{M} \vec{u} \wedge \vec{B}(P)$$

soit

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}^*$$

en posant

$$\vec{\Omega} = -\frac{\mathcal{M}}{J\omega} \vec{B}(P).$$

2. Si on néglige le mouvement de P , $\vec{\Omega}$ est un vecteur constant ; l'évolution de \vec{u} est régie par

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$$

ce qui caractérise une précession à la vitesse angulaire

$$\vec{\Omega} = -\frac{\mathcal{M}}{J\omega} \vec{B}.$$

L'approximation gyroscopique est valable si $\omega \gg \Omega$, soit si

$$\omega^2 \gg \frac{\mathcal{M}B}{J}.$$

3. $\omega \rightarrow \infty$.

a) $\vec{\Omega} \rightarrow \vec{0}$ donc \vec{u} a une direction fixe.

b) Lorsque $\vec{u} = -\vec{u}_z$, l'énergie potentielle est

$$U = \mathcal{M}B_z + mgz = \mathcal{M}B_0 + (\mathcal{M}a_2 + mg)z + \mathcal{M}a_4 \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right).$$

La condition d'équilibre est

$$\mathcal{M}a_2 + mg = 0.$$

La stabilité axiale impose $a_4 > 0$ tandis que la stabilité radiale impose $a_4 < 0$; ces deux conditions sont donc incompatibles.

D Approximation de l'orientation instantanée

1.

$$U = \mathcal{M} \|B(P)\| + mgz.$$

2. Il y a équilibre pour $a_2 = -\frac{mg}{\mathcal{M}}$.

La stabilité est assurée pour

$$\begin{cases} a_4 > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

d'après les courbes fournies, on a cette double condition pour $6 \text{ cm} < z < 6,7 \text{ cm}$.

3. La condition d'équilibre $-a_2 = \frac{mg}{\mathcal{M}}$ doit conduire à une solution à l'intérieur de la zone de stabilité ; il y a donc une limitation supérieure et une limitation inférieure.

4. Les conditions de stabilité latérale sont satisfaites lors du positionnement ($z < z_{eq}$).

E Influence de la température

Les aimantations de (A) et de (B) dépendent de la température. Le champ magnétique créé par l'aimant torique et le moment magnétique de l'aimant mobile dépendent donc de la température.

F Cas des aimants conducteurs

Dans le cas de matériaux conducteurs, il apparaît des courants induits. Il n'y a plus conservation de l'énergie.

Partie IV Lévitation dans le champ de pression d'une onde sonore

A Approximation acoustique

1. La membrane impose la continuité des composantes normales de la vitesse. Soit $Z(t) = L - \frac{U}{\omega} \cos \omega t$ la po-

sition instantanée de la membrane; cette condition s'écrit $u(Z(t), t) = u(t)$. L'élongation maximale de la membrane est $\frac{U}{\omega} = 8.10^{-7}$ m, ce qui est très inférieur à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 1,7.10^{-3}$ m. On peut donc confondre L et $Z(t)$. Il reste alors $f(L) = U$.

2. L'équation d'onde est, pour la vitesse acoustique

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Une vitesse de la forme $f(z) \sin \omega t$ est solution de l'équation d'onde si

$$f''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0.$$

La solution générale est

$$f(z) = A \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right).$$

Les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = L$ permettent de déterminer les constantes d'intégration; on a finalement

$$f(z) = U \frac{\sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)}{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}.$$

3. La vitesse est maximale aux points de cote

$$z_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ (ventres de vitesse).}$$

La valeur maximale de la vitesse est $v_M = \frac{U}{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$. Elle

diverge pour les pulsations $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$. Ces pulsations correspondent à des résonances (accord de phase entre les ondes réfléchies successives).

L'amplitude des ondes est limitée par les phénomènes dissipatifs (transferts thermiques, viscosité), les effets non linéaires, une transmission par la paroi en $z = 0$ qui n'est plus négligeable...

4. Dans l'approximation linéaire, l'équation d'Euler se réduit à

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

ce qui donne, en remarquant que la moyenne temporelle de la surpression acoustique est nulle :

$$p = p_0 + \mu_0 c v_M \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos \omega t.$$

Il n'y a pas de lévitation possible car $\langle p \rangle$ est uniforme.

B Approximation à l'ordre 2

1. La vitesse v_M n'est plus négligeable devant c . L'approximation linéaire n'est donc plus suffisante.

2. a) $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$.

b) On sait que $\frac{1}{2} \mu_0 v^2$ a les dimensions d'une pression (théorème de Bernoulli); on en déduit que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. La force volumique est donc

$$-\overrightarrow{\text{grad}} \langle p \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 v_M^2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{2\omega z}{c} \overrightarrow{u_z}.$$

La bille étant de petite taille, la force volumique peut être considérée comme uniforme à l'échelle de la bille; on a donc

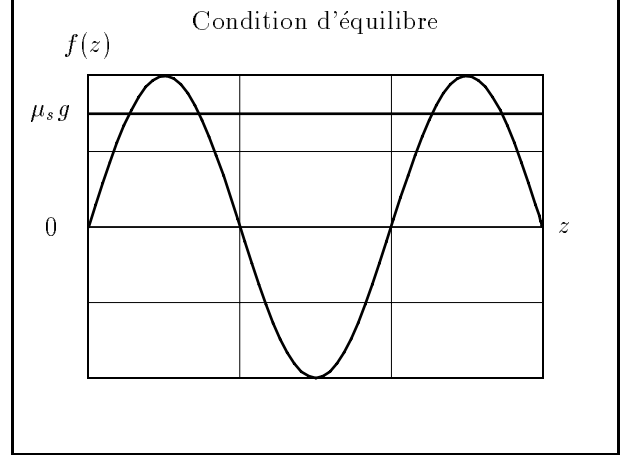
$$\left\langle \overrightarrow{F} \right\rangle = -\frac{4\pi r^3}{3} \overrightarrow{\text{grad}} \langle p \rangle = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{1}{2} \mu_0 v_M^2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{2\omega z}{c} \overrightarrow{u_z}.$$

c) La condition d'équilibre s'écrit

$$\mu_s g = \frac{1}{2} \mu_0 v_M^2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{2\omega z}{c}.$$

Les positions d'équilibre correspondent aux intersections d'une sinusoïde et d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Posons $\varphi(z) = \frac{1}{2} \mu_0 v_M^2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{2\omega z}{c}$.



Les points d'intersection pour lesquels $f'(z)$ est positif sont instables, tandis que les points d'intersection pour lesquels $f'(z)$ est négatif sont stables. En effet, dans le premier cas, si z augmente à partir de la position d'équilibre, la force de lévitation augmente et on s'écarte de l'équilibre. En revanche, dans le second cas, si z augmente à partir de la position d'équilibre, la force de lévitation diminue et on revient vers l'équilibre.

d) $\mu_{smax} = \frac{\mu_0 v_M^2 \omega}{2gc} = 6,3.10^4 \text{ kg.m}^{-3}$. Même les métaux les plus denses sont donc susceptibles de léviter.

3. L'équation d'Euler peut s'écrire

$$(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2) \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + (v_1 + v_2) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}.$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur à 1, il reste

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z}. \quad (1)$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur à 2, il reste

$$\mu_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z}. \quad (2)$$

On effectue la soustraction membre à membre (2) - (1); on obtient :

$$\mu_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_2}{\partial z}.$$