Les quatre parties du problème proposé sont consacrées à la description géométrique, dans des situations variées, de l'ensemble des produits des éléments de deux parties d'une algèbre sur $\mathbb{R}$.

Notation : Lorsque E et F sont des parties d'une $\mathbb{R}$-algèbre A, EF désigne l'ensemble des produits d'un élément de E et d'un élément de F, soit :

$$EF = \{x \in A \mid \exists (y,z) \in E \times F ; x = yz\}$$

où yz désigne le produit de y par z pour la multiplication d'anneau de A.

Rappelons une définition : si $X \subset \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}$, on dit que X est étoilé par rapport à u si pour tout $x \in X$, le segment $[u,x] = \{tu + (1-t)x\}_{t \in [0,1]}$ est inclus dans X. Si X est étoilé par rapport à l'un des ses points, on dit que X est étoilé.

Partie I -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre A est $\mathbb{C}$ identifiée à un plan d'origine O.

Soit (L_1) l'ensemble des complexes de la forme $z = \cos\theta \, e^{i\theta}$, (L_2) celui des complexes de la forme $z = t \cos\psi \, e^{i\psi}$, où θ, ψ décrivent $\mathbb{R}$ et t l'intervalle $[0,1]$.

I.A - Soit $\Pi = L_1 L_1$. Quelle est l'intersection de Π avec une demi-droite d'origine O du plan ? Caractériser Π soigneusement et le représenter graphiquement.

I.B - Comment $L_1 L_2$ se déduit-il de Π ? $L_1 L_2$ est-il convexe ? étoilé ?

Partie II -

Dans cette partie la $\mathbb{R}$-algèbre est $M_n(\mathbb{R})$:

Ici $n \in \mathbb{N}^*$, $E = S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$, F est la partie de E constituée des matrices symétriques définies positives, soit

$$F = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tX M X > 0\}$$

et G désigne l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$.

II.A - Pour chacun des ensembles E, F, G, décider s'il est convexe ou non et le démontrer.

II.B - Montrer que si $S \in F$, il existe une matrice $S' \in F$ telle que $S = S'^2$.

II.C - En déduire que si $A \in E$ et $S \in F$, AS est semblable à $S'AS'$ où $S' \in F$ et $S'^2 = S$.

II.D - Montrer l'égalité $EF = G$; on pourra utiliser II.C ainsi que l'égalité suivante, valable pour D et P d'ordre n, avec P inversible : $PDP^{-1} = (PD\,{}^tP)({}^tP^{-1}P^{-1})$.

II.E - G est-il connexe par arcs ?

Remarque : il n'est pas nécessaire dans cette question, d'appliquer ce qui précède, cela peut néanmoins se révéler suffisant.

Partie III -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre est $\mathbb{C}$.

III.A - Montrer que toute partie étoilée de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

III.B -

a) Caractériser, pour $(a, z, z') \in \mathbb{C}^3$, l'ensemble $[0, a][z, z']$.

b) Démontrer que la réunion d'une famille de parties de $\mathbb{C}$, étoilées par rapport à 0, reste étoilée par rapport à 0 (voir le rappel de définition).

III.C - Démontrer que si $E \subset \mathbb{C}$ est étoilée par rapport à 0 et si $F \subset \mathbb{C}$ est étoilée, EF est étoilée par rapport à 0.

Partie IV -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre est $\mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^n$ (avec $n = 2$ ou 3) est muni du produit "canonique" : $(a_1,a_2)(b_1,b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ lorsque $n = 2$ et $(a_1,a_2,a_3)(b_1,b_2,b_3) = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$ lorsque $n = 3$. On ne demande pas de vérifier que $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$– espace vectoriel et de ce produit est une algèbre.

Comme les points de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ ainsi que les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sont repérés par des n-uplets, cela permet de calculer des produits à l'aide des formules ci-dessus ; pour des raisons de cohérence, cf IV.A.1, IV.B.2 et IV.B.3, on conviendra que le produit de deux points est un point et que le produit d'un point (ou d'un vecteur) par un vecteur est un vecteur.

IV.A -

IV.A.1) Soit $D = (a; \vec{u})$ et $D' = (b; \vec{v})$ deux droites dans le plan P, avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls. Montrer que : $DD' = \{ab + \lambda b\vec{u} + \mu a\vec{v} + \lambda\mu\vec{u}\vec{v} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

IV.A.2) On suppose que $b\vec{u}$ et $a\vec{v}$ sont indépendants ; soit alors le repère affine $r = (ab; b\vec{u}, a\vec{v})$; montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que DD' soit paramétré dans r par : $(\lambda, \mu) \mapsto (X = \lambda + \alpha\lambda\mu, Y = \mu + \beta\lambda\mu)$. (1)

IV.A.3) Supposons α et β non nuls : on pose $\Lambda = 2\beta\lambda + 1$, $M = 2\alpha\mu + 1$. Déterminer $\Lambda - M$ et ΛM en fonction de X, Y, α et β. En déduire que DD' est l'ensemble défini par une inégalité du type $\phi(X,Y) \geq 0$. Conclure quant à la nature de DD'.

IV.A.4) Étudier le cas $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

IV.A.5) Étudier le cas $\alpha = \beta = 0$. Que dire alors de D et D' ?

IV.B - La suite de ce problème a désormais pour cadre $\mathbb{R}^3$, muni du repère affine canonique $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et de sa structure euclidienne orientée canonique.

Soit $D = (a;\vec{u})$ et $D' = (b;\vec{v})$ deux droites dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls.

IV.B.1) Que dire de DD' si D passe par l'origine ? DD' est-il alors convexe ? étoilé ?

IV.B.2) On suppose que $(b\vec{u}, a\vec{v}, \vec{u}\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a) Donner une représentation paramétrique de DD' dans le repère $r = (ab;\, b\vec{u},\, a\vec{v},\, \vec{u}\vec{v})$ analogue à celle de (1). En déduire une représentation de DD' de la forme $Z = \psi(X,Y)$.

b) On vérifie facilement, et on n'en demande pas la démonstration, que, quitte à remplacer a (respectivement b) par un certain a' (respectivement b') sur D (respectivement D'), on peut supposer que $b\vec{u}$ et $a\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{u}\,\vec{v}$.

Soit un autre repère $r' = (ab;\, \vec{I},\, \vec{J},\, \vec{K})$, orthonormé celui-là, tel que $\vec{I}$ et $\vec{J}$ soient dans $\mathrm{Vect}(b\vec{u},\, a\vec{v})$. De quelle forme sont les formules de passage entre les coordonnées X, Y, Z d'un point relativement à r et X', Y', Z' relativement à r' ? Montrer que DD' a dans r' une équation de la forme :

$$Z' = AX'^2 + 2BX'Y' + CY'^2 \qquad (2)$$

c) Montrer que les droites $(ab;\, b\vec{u})$ et $(ab;\, a\vec{v})$ sont incluses dans DD'. Quelle forme d'équation obtient-on dans (2) si on choisit $\vec{I}$, $\vec{J}$ portés par les bissectrices de ces deux droites ? Un tel choix est-il possible ? Quelle est la nature de DD' ?

IV.B.3) On dira désormais que le couple (D,D') est dégénéré si $(b\vec{u},\, a\vec{v}, \vec{u}\vec{v})$ est lié.

On suppose que (D,D'), est dégénéré mais que $(b\vec{u},\, a\vec{v})$ est libre. Déduire de IV.A la nature de DD'.

IV.C - On s'intéresse ici au cas de dégénérescence du couple (D,D').

IV.C.1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, montrer qu'une condition suffisante de dégénérescence est que $\overrightarrow{Ob}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{Oa}$ à $\vec{v}$.

IV.C.2) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls donnés, on cherche le lieu (L) des points $a = (x,y,z)$ tels que le couple (D,D') où $D = (a;\,\vec{u})$ et $D' = (a;\,\vec{v})$ soit dégénéré.

a) Montrer que (L) a une équation de la forme ${}^tXMX = 0$, avec M symétrique de taille 3×3 que l'on calculera. Exprimer $\det M$ à l'aide notamment des composantes de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ et du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) Lorsque $\det M$ est non nul, utiliser les théorèmes de réduction pour montrer que (L) est un cône contenant O. Indiquer cinq droites particulières incluses dans (L). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ pour que la droite $(O;\ \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit aussi incluse dans (L).

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\vec{u}, \vec{v})$ pour que $\det M \neq 0$.

d) Lorsque $\det M = 0$, quelle est la nature de (L) ?

IV.C.3) On s'intéresse ici aux ensembles (L') définis par une équation de la forme $q'(X) = {}^tXM'X = 0$, où M' est une matrice symétrique 3×3 de trace nulle.

a) À quelle condition la forme quadratique q' est-elle positive ?

b) Que dire de (L') lorsque $\operatorname{rg} M' \leq 1$? lorsque $\operatorname{rg} M' = 2$?

c) On suppose $\operatorname{rg} M' = 3$. Montrer que (L') n'est pas réduit à l'origine. Soit X dans $(L')\backslash\{O\}$ et $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormale telle que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OX}$. De quelle forme est la matrice de q' dans la base C ? Montrer que l'intersection de (L') et du plan $(O; \vec{v}, \vec{w})$ est la réunion de deux droites orthogonales. Montrer qu'il existe une infinité de bases orthonormales C' telles que la matrice de q' dans C' ait ses trois coefficients diagonaux nuls.

d) On suppose que l'on a deux vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que (L') contienne les droites $(O;\ \vec{u})$ et $(O; \vec{w})$, où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ telle que $\vec{u}_1$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\vec{w}_1$ à $\mathrm{Vect}(\vec{w})$. Que dire de la matrice de q' relativement à une telle base ? En considérant l'intersection de (L') et du plan $(O;\ \vec{u}_1, \vec{v}_1)$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que (L') contienne aussi $(O; \vec{v})$.

••• FIN •••