Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $u \cdot v$, la norme $\|u\|$.

De plus, dans les parties I et II, E désigne un espace euclidien de dimension n, $(n \geq 2)$.

Partie I -

I.A - Soient u et v deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{bmatrix} \text{ et } G(u, v) = \det[\mathrm{Gram}(u,v)]$$

I.A.1) Montrer que : $G(u, v) \geq 0$.

I.A.2) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et B une base orthonormale de P. Vérifier que : $G(u, v) = [\det_B(u,v)]^2$.

I.A.3) À quelle condition a-t-on $G(u, v) = 0$?

I.B - Dans toute la suite de la partie I, ***n* est égal à 3 et *E* est orienté**. Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E, on note $\mathrm{Gram}(u, v, w)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{bmatrix} \text{ et } G(u, v, w) = \det[\mathrm{Gram}(u, v, w)]$$

I.B.1) Calculer $G(u, v, w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

I.B.2) On suppose w orthogonal à u et v. Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.

I.C -

I.C.1) u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E. Montrer qu'il existe t et n, vecteurs de E, vérifiant : $w = t + n$, $u \cdot n = v \cdot n = 0$, (u, v, t) liée.

Montrer que, dans ces conditions, on a : $G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, n)$

I.C.2) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un triplet (x, y, z) de réels différent de $(0, 0, 0)$ tel que $xu + yv + zw$ soit orthogonal à u, v et w.

b) $G(u, v, w) = 0$

I.C.3) En déduire que : $G(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow (u, v, w)$ liée

I.C.4) Montrer que $G(u, v, w)$ est un réel positif.

I.D -

I.D.1) u, v, w sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_B(u, v, w)|$ ne dépend pas du choix de B.

I.D.2) Soit P un plan de E contenant u et v et n_1 un vecteur unitaire orthogonal à P. On désigne par B_1 une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que :

$$G(u, v, w) = [\det_B(u, v, w)]^2$$

I.E - Pour u, v vecteurs quelconques de E, $u \wedge v$ désigne le produit vectoriel de u par v.

Rappels

- Si B est une base orthonormée directe de E, pour tout élément y de E on a $\det_B(u, v, y) = (u \wedge v) \cdot y$.
- P et P', deux plans de E de vecteurs normaux respectifs n et n' (n et n' non nuls) sont dits orthogonaux si $n \cdot n' = 0$.

I.E.1) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)$

I.E.2) Soient P_1, P_2 et P_3 des plans de E orthogonaux deux à deux et p, q, r les projections orthogonales sur ces trois plans. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in E^2,\ \|a \wedge b\|^2 = G(p(a), p(b)) + G(q(a), q(b)) + G(r(a), r(b))$$

Partie II -

Soient $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$ on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$.

On note $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice d'élément général $g_{i,j}$ et le déterminant de cette matrice est noté

$$G(u_1, \ldots, u_n) = \det[\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)]$$

II.A - Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On pose, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$$

II.A.1) Exprimer, pour tout i, tout j, $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans la base B.

II.A.2) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = {}^tAA$$

II.A.3) En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n)$ est un réel positif. Montrer que :

$$G(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}$$

II.B - On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ **une base orthonormale pour f_1** et $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, élément de $M_n(\mathbb{R})$, et une matrice P orthogonale telles que : $D = {}^tPG_1P$.

II.B.2) Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ la famille de vecteurs de E de matrice P dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Montrer que : $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n) = D$.

En déduire que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthogonale pour le produit scalaire $(x,y) \mapsto x \cdot y$ et orthonormale pour f_1.

II.B.3) Montrer que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs.

II.C - Soit $(u_1, \ldots, u_n)$, $(u'_1, \ldots, u'_n)$ **deux bases orthonormales pour f_1**.

II.C.1) Montrer qu'il existe S, matrice orthogonale, telle que : $G_2 = {}^tSG_1S$ avec $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ et $G_2 = \mathrm{Gram}(u'_1, \ldots, u'_n)$.

II.C.2) Montrer que : $\det(G_1) = \det(G_2)$ et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u'_i\|^2$.

II.D - $\mathcal{E}$ désigne ici un espace affine euclidien de dimension 2 et E l'espace vectoriel associé. $(O; i, j)$ est un repère orthonormé de ce plan. On considère deux nombres réels strictement positifs a et b et on définit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ où x et y désignent les coordonnées dans le repère $(O; i, j)$.

II.D.1) Pour u et v, vecteurs de E, de coordonnées (x,y) et (x',y') dans la base (i,j) on note

$$f_1(u, v) = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}$$

Montrer qu'on définit ainsi un nouveau produit scalaire dans E.

II.D.2) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et parallèle à T et M' un élément de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Montrer que $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$.

II.D.3) Montrer que $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ et que $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2b^2$.

Partie III -

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \ldots, u_r$ sont r vecteurs de E, on note, comme dans la Partie II, $G(u_1, \ldots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de *Gram*).

III.A - Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x^\perp + x_F$.

III.A.1) Exprimer x_F en fonction des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.

III.A.2) Exprimer simplement le réel $d(x, F)$ défini par

$$d(x, F) = \inf\{\|x - f\| \ ; \ f \in F\}$$

III.A.3) Montrer que :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \ldots, e_p)}{G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

III.B - Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t) g(t) dt .$$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par :

$$\forall t \in \left]0, 1\right], \ p_\lambda(t) = t^\lambda, \ p_\lambda(0) = 0 .$$

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

III.B.1) Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \ldots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

III.B.2) Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème.

Pour n entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf\left\{\int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^{n} a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt \ ; \ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$$

En interprétant u_n^k comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E, exprimer u_n^k en fonction de déterminants de *Gram*.

III.C - Soit p un entier non nul, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)$.

Ce déterminant sera noté $C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$.

III.C.1) Soit $F(X) = \dfrac{(X - a_1)\ldots(X - a_{p-1})}{(X + b_1)\ldots(X + b_p)}$. Expliciter la décomposition en éléments simples de F.

III.C.2) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \ldots & \dfrac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{a_p + b_1} & \ldots & \dfrac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de III.C.1, et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p)C(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)} C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$$

III.C.3) En déduire :

$$C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p}(a_j - a_i) \prod_{1 \le i < j \le p}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \le i, j \le p}(a_i + b_j)}$$

III.D -

III.D.1) En notant $\lambda_0 = k$ et, pour i entier élément de $[\![0, n]\!]$, $\mu_i = \lambda_i + \dfrac{1}{2}$, exprimer u_n^k à l'aide d'un déterminant du type précédent.

III.D.2) En déduire :

$$u_n^k = \frac{1}{1 + 2k} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)^2$$

III.E - On suppose que : $\forall i \geq 1$, $k \neq \lambda_i$.

III.E.1) Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que :

$$\forall i \geq N, \quad 1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} > 0$$

III.E.2) Quelle est la nature de la série $\sum_{i \geq N} \ln\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$?
En déduire que $u_n^k \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

III.E.3) Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n ; \left\| p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leq \varepsilon$$

III.E.4) En déduire, à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que toute fonction f de E est limite d'une suite d'éléments de $\bigcup_{n \geq 1} E_n$.

••• FIN •••
