

CENTRALE 99 - PHYSIQUE I – PC

Question préliminaire : En basses fréquences, l'efficacité de blindage en champ magnétique est faible : il sera difficile de protéger un équipement.

Partie I – Cas de la lame conductrice infinie.

I.A- Propagation d'une onde plane dans un milieu parfait (conducteur ou non).

I.A1-a) $D = \epsilon E$ et $B = \mu H$.

Dans le milieu, supposé électriquement isolant, $J = \mathbf{0}$. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \underline{E} = \rho / \epsilon ; \operatorname{div} \underline{B} = 0 ; \operatorname{rot} \underline{E} = -\partial \underline{B} / \partial t ; \operatorname{rot} \underline{B} = -\mu \epsilon \partial \underline{E} / \partial t .$$

b) Dans un milieu conducteur, seule la dernière équation change, elle devient : $\operatorname{rot} \underline{B} = \mu \sigma \underline{E} - \mu \epsilon \partial \underline{E} / \partial t$.

I.A.2) Quand on pose $\underline{E} = \operatorname{Réal}(\underline{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t})$ et $\underline{B} = \operatorname{Réal}(\underline{B}(\mathbf{r})e^{i\omega t})$, les équations de Maxwell deviennent : $\operatorname{div} \underline{E}(\mathbf{r}) = \rho / \epsilon ; \operatorname{div} \underline{B}(\mathbf{r}) = 0 ; \operatorname{rot} \underline{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \underline{B}(\mathbf{r}) ; \operatorname{rot} \underline{B}(\mathbf{r}) = \mu(\sigma + i\omega\epsilon)\underline{E}(\mathbf{r})$.

On prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère : $0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{B}(\mathbf{r})) = \mu(\sigma + i\omega)\operatorname{div} \underline{E}(\mathbf{r}) = \mu(\sigma + i\omega)\rho / \epsilon$: ρ est nul.

I.A.3) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{E}(\mathbf{r})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{E}(\mathbf{r})) - \Delta \underline{E}(\mathbf{r})$. Or d'après ce qui précède, $\operatorname{div} \underline{E}(\mathbf{r}) = 0$, donc

$\Delta \underline{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\underline{E}(\mathbf{r}) = (i\mu\sigma\omega - \epsilon\mu\omega^2)\underline{E}(\mathbf{r})$. L'amplitude complexe $\underline{E}(\mathbf{r})$ du champ électrique vérifie l'équation (1) : $\Delta \underline{E}(\mathbf{r}) = (i\mu\sigma\omega - \epsilon\mu\omega^2)\underline{E}(\mathbf{r})$.

En calculant $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{B}(\mathbf{r}))$, on montre de même que $\underline{B}(\mathbf{r})$ vérifie aussi l'équation (1).

I.A.4) Dans le vide, $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$ et $\epsilon = \epsilon_0$.

L'équation (1) devient $\Delta \underline{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mu_0\omega^2 \underline{E}(\mathbf{r}) = (\omega^2/c^2)\underline{E}(\mathbf{r})$: c'est bien l'équation de propagation dans le vide.

I.A.5) $\underline{E}(\mathbf{r}) = \underline{E}(x) \mathbf{e}_y$.

a) L'équation (1) s'écrit alors $\underline{E}''(x) = (i\mu\sigma\omega - \epsilon\mu\omega^2)\underline{E}(x)$. On pose $\gamma^2 = (i\mu\sigma\omega - \epsilon\mu\omega^2)$ (cette équation admet deux solutions opposées, on choisit par exemple $\operatorname{Réal}(\gamma) > 0$). $\underline{E}(x)$ se met bien sous la forme (2) : $\underline{E}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$.

b) On calcule $\underline{B}(x)$ en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \underline{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \underline{B}(\mathbf{r}) = \underline{E}'(x) \mathbf{e}_z \Rightarrow \underline{B}(x) = i \frac{\gamma}{\omega} (-A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}) \mathbf{e}_z.$$

I.A.6) $\epsilon \approx \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ et $\sigma \approx 3 \cdot 10^7$ à $7 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

a) Pour $\omega < 2\pi \cdot 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$, le produit $\epsilon\omega$ est inférieur à 1000/18 soit environ 50. C'est bien nettement inférieur à la conductivité. Dans l'équation de Maxwell-Ampère, le terme $\epsilon \partial \underline{E} / \partial t$ (courant de déplacement) est négligeable devant le courant \underline{J} . L'équation de propagation (1) devient : $\Delta \underline{E}(\mathbf{r}) = i\mu\sigma\omega \underline{E}(\mathbf{r})$.

b) On rencontre une équation analogue par exemple :

. en thermodynamique quand on étudie la diffusion thermique dans un milieu soumis à des conditions aux limites sinusoïdales (par exemple l'évolution annuelle de la température dans le sol terrestre) ;

. en mécanique des fluides quand on étudie, dans un fluide visqueux, le champ des pressions ou des vitesses induits par le mouvement sinusoïdal d'une plaque (parallèlement à elle-même) ;

c) Aux fréquences supérieures à 1 THz, la loi d'Ohm n'est plus valable : les électrons ne peuvent plus suivre les variations du champ électrique (on définit alors une conductivité complexe). La période du champ électrique doit être très supérieure à la durée de relaxation des porteurs de charges (ou « âge moyen » des porteurs), c'est-à-dire à la durée moyenne entre deux chocs, celle-ci étant de l'ordre de 10^{-14} s.

d) L'expression simplifiée de γ^2 est $\gamma^2 = i\mu\sigma\omega$ d'où $\gamma = \frac{1+i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$. $\mu_0\sigma\omega$ s'exprime

en $(\text{H.m}^{-1}).(\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}).\text{s}^{-1}$ donc en m^{-2} (en effet, des H.s^{-1} sont homogènes à l'impédance d'une bobine donc à des Ω) : δ est bien homogène à une longueur.

e) $\underline{B}(x) = \underline{E}(x) = A_1 \exp(-x/\delta) \exp i(\omega t - x/\delta) - A_2 \exp(x/\delta) \exp i(\omega t + x/\delta)$: le premier terme représente une onde plane qui se propage dans le sens des $x > 0$ tout en s'atténuant sur une distance caractéristique δ . Le second terme s'interprète de la même façon mais pour une onde se propageant dans le sens des $x < 0$.

δ est appelée « épaisseur de peau » car c'est la distance caractéristique sur laquelle pénètrent les champs dans le conducteur.

f) Quand ω ou σ augmentent, δ diminue.

g) Dans un bon conducteur : $\frac{\delta}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \frac{\omega}{2\pi c} = \sqrt{\frac{\omega/2\pi}{\pi\mu_0 c^2 \sigma}} < \sqrt{\frac{10^{12}}{2.4\pi.10^{-7}.9.10^{16}.3.10^7}} \approx 4.10^{-4}$.

La distance caractéristique de variation des champs est négligeable devant la longueur d'onde dans le vide : dans le cas d'un bon conducteur, on se trouve naturellement dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires.

h) $\lambda_0 = 300$ m et $\delta = 62$ μm . On vérifie que $\delta \ll \lambda_0$. δ est assez faible : dès qu'on se trouve à une profondeur de quelques 0.1 mm dans le conducteur, les champs et les courants sont très fortement atténués.

I.B- Couplage à travers une lame conductrice infinie.

I.B.1- a) Onde incidente : $\underline{E}_{inc} = \underline{E}_{0,inc} e^{i(\omega t - k_0 x)} \mathbf{e}_y$;

Onde réfléchie : $\underline{E}_{ref} = \underline{E}_{0,ref} e^{i(\omega t + k_0 x)} \mathbf{e}_y$;

Onde transmise : $\underline{E}_{tr} = \underline{E}_{0,tr} e^{i(\omega t - k_0(x-d))} \mathbf{e}_y$.

b) Onde incidente : $\underline{B}_{inc} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_0 \wedge \underline{E}_{inc} = \frac{\underline{E}_{0,inc}}{c} e^{i(\omega t - k_0 x)} \mathbf{e}_z$ et $\underline{H}_{inc} = \underline{B}_{inc}/\mu_0$;

Onde réfléchie : $\underline{B}_{ref} = \frac{-1}{\omega} \mathbf{k}_0 \wedge \underline{E}_{inc} = -\frac{\underline{E}_{0,ref}}{c} e^{i(\omega t + k_0 x)} \mathbf{e}_z$ et $\underline{H}_{ref} = \underline{B}_{ref}/\mu_0$;

Onde transmise : $\underline{B}_{tr} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_0 \wedge \underline{E}_{tr} = \frac{\underline{E}_{0,tr}}{c} e^{i(\omega t - k_0(x-d))} \mathbf{e}_z$ et $\underline{H}_{tr} = \underline{B}_{tr}/\mu_0$.

I.B.2) Le champ électrique est continu aux interfaces $x = 0$ et $x = d$ (il n'a pas de composante normale).

Le champ \mathbf{H} est continu parce qu'il est tangent aux interfaces et qu'il n'y a pas de courants surfaciques. Le milieu n'ayant pas de propriétés magnétiques, $\mu = \mu_0$ comme dans le vide, le facteur de proportionnalité entre \mathbf{B} et \mathbf{H} est le même dans les trois zones : \mathbf{B} est continu aux interfaces.

I.B.3) En $x = 0$:

$$\text{continuité de } \mathbf{E} : \underline{E}_{0,inc} + \underline{E}_{0,ref} = A_1 + A_2 ;$$

$$\text{continuité de } \mathbf{B} : \frac{1}{c}(\underline{E}_{0,inc} - \underline{E}_{0,ref}) = i \frac{\gamma}{\omega} (-A_1 + A_2) \Leftrightarrow (\underline{E}_{0,inc} - \underline{E}_{0,ref}) = i \frac{\gamma}{k_0} (-A_1 + A_2) ;$$

En $x = d$:

$$\text{continuité de } \mathbf{E} : A_1 e^{-\gamma d} + A_2 e^{\gamma d} = \underline{E}_{0,tr}$$

$$\text{continuité de } \mathbf{B} : i \frac{\gamma}{\omega} (-A_1 e^{-\gamma d} + A_2 e^{\gamma d}) = \frac{1}{c} \underline{E}_{0,tr} \Leftrightarrow i \frac{\gamma}{k_0} (-A_1 e^{-\gamma d} + A_2 e^{\gamma d}) = \underline{E}_{0,tr}$$

I.C- Analogie avec une ligne électrique.

$$\text{I.C.1) Loi de mailles : } v(x,t) = L \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) (x,t) dx + Ri(x,t) + v(x+dx,t) ;$$

$$\text{Loi des nœuds : } i(x,t) = C \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x+dx,t) dx + Gv(x+dx,t) + i(x+dx,t) .$$

$$\text{Au premier ordre en } dx, \text{ ces deux équations deviennent : } \frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri \text{ et } \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv .$$

I.C.2) On cherche $v(x, t) = \text{Réel}(\underline{V}(x)e^{i\omega t})$ et $i(x, t) = \text{Réel}(\underline{I}(x)e^{i\omega t})$. Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \underline{V}'(x) = -(R + iL\omega)\underline{I}(x) \\ \underline{I}'(x) = -(G + iC\omega)\underline{V}(x) \end{cases}$$

$\underline{V}(x)$ vérifie l'équation différentielle $\underline{V}''(x) = (R + iL\omega)(G + iC\omega)\underline{V}(x)$. $\underline{I}(x)$ vérifie la même équation.

I.C.3) On pose $\gamma^2 = (R + iL\omega)(G + iC\omega)$. $\underline{V}(x)$ se met donc sous une forme analogue à l'expression (2) : $\underline{V}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$.

$$\underline{I}(x) = \frac{-\underline{V}'(x)}{R + iL\omega} = \frac{\gamma}{R + iL\omega} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) .$$

$$\text{I.C.4) } Z_c = \frac{R + iL\omega}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + iC\omega} .$$

I.C.5) L'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ s'écrit, en faisant appel au champ \mathbf{H} et en notations complexes : $\underline{E}'(x) = -i\mu_0 \omega \underline{H}(x)$.

L'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ s'écrit ici $\underline{H}'(x) = -(\sigma + i\varepsilon\omega)\underline{E}(x)$.

Ces deux équations sont bien analogues à celles de la question I.C.2.

On peut établir l'analogie suivante :

$$\text{tension } v \leftrightarrow \text{champ } \mathbf{E}$$

$$\text{courant } i \leftrightarrow \text{champ } \mathbf{H}$$

$$\text{conductance de fuite linéique } G \leftrightarrow \text{conductivité } \sigma$$

capacité linéique $C \leftrightarrow$ permittivité électrique ε
 inductance linéique $L \leftrightarrow$ permittivité magnétique μ_0
 résistance linéique de fuite $R \leftrightarrow 0$

On en déduit $z_c = \frac{i\mu_0\omega}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sigma + i\varepsilon\omega}$ avec $\gamma^2 = i\mu\sigma\omega - \varepsilon\mu\omega^2 = (0+i\mu_0\omega).(\sigma + i\varepsilon\omega)$.

μ_0 s'exprime en H.m^{-1} , ω en s^{-1} et γ en m^{-1} donc z_c s'exprime en H.s^{-1} , ou encore en Ω : z_c est homogène à une impédance électrique.

I.C.6) Une ligne dans laquelle on a un phénomène de propagation analogue à celui des ondes électromagnétiques dans le vide vérifie, grâce à l'analogie établie à la question I.C.5 :

$G = 0$ (dans le vide $\sigma = 0$) ; $R = 0$; $\gamma^2 = -LC\omega^2$ donc $\gamma = i\omega\sqrt{LC}$ (on a choisi $\text{Im}(\omega) > 0$).

L'impédance caractéristique d'une telle ligne (ligne parfaite) est alors

$$Z_c = \frac{iL\omega}{i\omega\sqrt{LC}} = \frac{i\omega\sqrt{LC}}{iC\omega} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ C'est donc bien une résistance } R_C = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'impédance z_0 du vide est alors $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 337 \Omega$.

I.C.7) Premier domaine $x < 0$ et troisième domaine $x > d$:

$$G = 0 \leftrightarrow \sigma = 0$$

$$C \leftrightarrow \varepsilon_0$$

$$L \leftrightarrow \mu_0$$

$$R = 0 \leftrightarrow 0$$

$$\text{Impédance caractéristique } R_C \leftrightarrow z_0$$

Deuxième domaine $0 < x < d$:

$$G \leftrightarrow \sigma$$

$$C \leftrightarrow \varepsilon$$

$$L \leftrightarrow \mu_0$$

$$R \leftrightarrow 0$$

$$\text{Impédance caractéristique } Z_C \leftrightarrow z_c$$

I.C.8 – a) En $x = 0$ et $x = d$, il y a continuité du courant et de la tension. En utilisant des notations analogues à celle de la partie I.B et les résultats de la question I.C.3, on peut écrire les conditions de continuité :

En $x = 0$:

$$\text{continuité de } V : \underline{V}_{0,inc} + \underline{V}_{0,ref} = A_1 + A_2 ;$$

$$\text{continuité de } I : \frac{1}{R_C}(\underline{V}_{0,inc} - \underline{V}_{0,ref}) = \frac{1}{Z_C}(A_1 - A_2) \Leftrightarrow \underline{V}_{0,inc} - \underline{V}_{0,ref} = \frac{R_C}{Z_C}(A_1 - A_2) ;$$

En $x = d$:

$$\text{continuité de } V : A_1 e^{-\gamma d} + A_2 e^{\gamma d} = \underline{V}_{0,tr}$$

$$\text{continuité de } I : \frac{1}{Z_C}(A_1 e^{-\gamma d} - A_2 e^{\gamma d}) = \frac{1}{R_C} \underline{V}_{0,tr} \Leftrightarrow \frac{R_C}{Z_C}(A_1 e^{-\gamma d} - A_2 e^{\gamma d}) = \underline{V}_{0,tr}$$

Ces équations sont analogues à celles de la question I.B.3. En effet, $\frac{z_0}{z_c} = \frac{\gamma\mu_0 c}{i\mu_0\omega} = \frac{\gamma c}{i\omega} = -i\frac{\gamma}{k_0}$ est

bien l'analogue de $\frac{R_c}{Z_c}$.

b) On fait apparaître le rapport z_0/z_c dans la formule fournie au I.3.B :

$$\frac{\underline{E}_{0,inc}}{\underline{E}_{0,tr}} = i \frac{(k_0 - i\gamma)^2 e^{\gamma d} - (k_0 + i\gamma)^2 e^{-\gamma d}}{4k_0\gamma} = ik_0 \frac{\left(1 + \frac{z_0}{z_c}\right)^2 e^{\gamma d} - \left(1 - \frac{z_0}{z_c}\right)^2 e^{-\gamma d}}{4\gamma}$$

$$= \frac{1}{4z_0 z_c} \left((z_c + z_0)^2 e^{\gamma d} - (z_c - z_0)^2 e^{-\gamma d} \right).$$

c) L'impédance des domaines $x < 0$ et $x > d$ ont même impédance z_0 ($z_0 = \frac{E}{H}$) donc

$$\frac{\underline{H}_{0,inc}}{\underline{H}_{0,tr}} = \frac{\underline{E}_{0,inc}}{\underline{E}_{0,tr}}.$$

$$\text{I.C.9) } \frac{\underline{E}_{0,inc}}{\underline{E}_{0,tr}} = \frac{1}{4z_0 z_c} \left((z_c + z_0)^2 e^{\gamma d} - (z_c - z_0)^2 e^{-\gamma d} \right) = \frac{(z_c + z_0)^2}{4z_0 z_c} e^{\gamma d} \left(1 - \frac{(z_c - z_0)^2}{(z_c + z_0)^2} e^{-2\gamma d} \right).$$

Avec $\gamma = \alpha + i\beta$, on obtient bien l'expression proposée par l'énoncé :

$$\left| \frac{\underline{E}_{0,inc}}{\underline{E}_{0,tr}} \right| = \left| \frac{(z_c + z_0)^2}{4z_0 z_c} \right| e^{\alpha d} \left| 1 - \frac{(z_c - z_0)^2}{(z_c + z_0)^2} e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d} \right|.$$

I.C.10) A l'interface entre les deux lignes, la continuité de la tension et du courant s'écrit :

$$\begin{cases} V_{inc} + V_{ref} = V_{tr} \\ \frac{1}{R_{c1}} (V_{inc} - V_{ref}) = \frac{1}{R_{c2}} V_{tr} \end{cases} \text{ d'où } \tau = \frac{V_{tr}}{V_{inc}} = \frac{2R_{c2}}{R_{c1} + R_{c2}}.$$

Le terme (a) peut donc s'écrire $(a) = \left| \frac{1}{\tau_{vide \rightarrow \text{m\u00e9tal}}} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{m\u00e9tal} \rightarrow \text{vide}}} \right|$: il traduit donc la transmission (en amplitude) du champ électrique aux deux interfaces.

I.C.11- a) Le terme (b) traduit l'att\u00e9nuation du champ \u00e9lectrique dans le m\u00e9tal (attention, c'est le rapport de l'amplitude du champ *incident* sur celle du champ *transmis* que nous \u00e9tudions, d'o\u00f9 le signe + dans l'exponentielle).

b) Le champ dans le m\u00e9tal est la superposition de tous les champs issus de r\u00e9flexions multiples sur les interfaces vide - m\u00e9tal ($x = 0$) et m\u00e9tal - vide ($x = d$). Le champ transmis est donc lui m\u00eame la superposition de champs transmis en $x = d$ issus d'ondes d\u00e9phas\u00e9es entre elles (\u00e0 cause des aller-retour dans le m\u00e9tal).

I.C.12- a) Dans le cas d'un bon conducteur, $\sigma \gg \varepsilon\omega$. Dans ce cas, $z_c^2 \approx \frac{i\mu_0\omega}{\sigma}$ donc

$$z_c = (1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}. \text{ On en déduit } \left| \frac{z_c}{z_0} \right| = \left(\frac{\mu_0\omega}{\sigma} \cdot \frac{1}{\mu_0^2 c^2} \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c} \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \ll 1 \text{ (voir question$$

I.A.6.g).

b) L'expression de la question I.C.9 se simplifie donc :

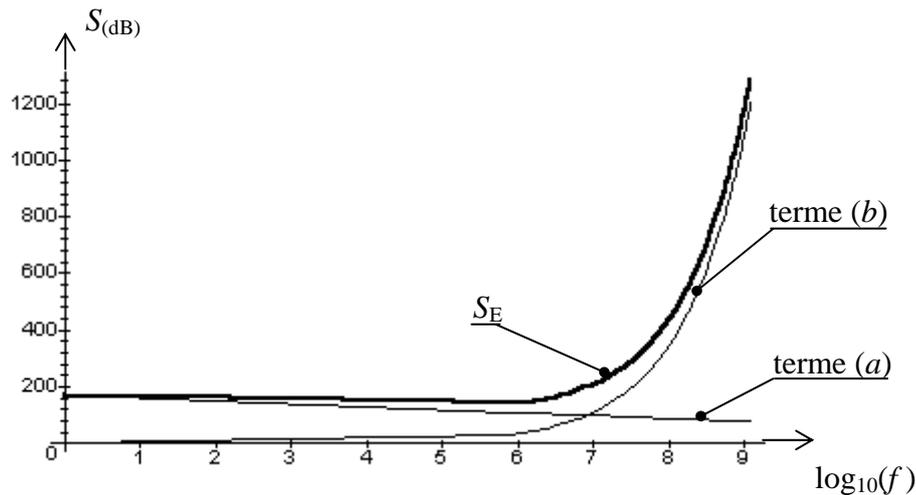
$$\left| \frac{E_{0,inc}}{E_{0,tr}} \right| = \left| \frac{z_0}{4z_c} \right| e^{\alpha d} \left| 1 - e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d} \right|.$$

I.C.13- a) Terme (a) : $(a) = \frac{c}{2\sqrt{2}\omega\delta} = \frac{c}{4} \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\omega}}$: ce terme diminue quand la fréquence augmente.

Terme (b) : $(b) = \exp(\alpha d) = \exp(d/\delta)$ (voir question I.A.6.d) donc $(b) = \exp\left(d\sqrt{\mu_0\sigma\omega/2}\right)$: ce terme augmente avec la fréquence.

b) Si $d \gg \delta$, le terme (c) est peu différent de 1. Le champ électrique est très atténué quand l'onde arrive en $x = d$, seule participe à l'onde transmise l'onde qui a simplement « traversé » la lame de métal. Les ondes issues de réflexions multiples sur les faces $x = 0$ et $x = d$ sont trop atténuées pour être prises en compte.

I.C.14- a) Avec les valeurs numériques $d = 0.25 \text{ mm}$, $\sigma = 6.5 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, on obtient les courbes suivantes :



L'efficacité de blindage en S_H a la même allure.

b) En faible fréquence (ici, inférieures à 10^5 Hz environ), le terme prépondérant est le terme (a), le phénomène prépondérant est donc la transmission aux interfaces. En haute fréquences (ici, supérieures à 10^8 Hz environ), c'est le terme (b), le phénomène prépondérant est l'atténuation de l'onde dans le conducteur. C'est normal car l'épaisseur de peau diminue avec la fréquence donc, plus la fréquence est élevée, plus l'épaisseur de peau est faible et plus le champ est atténué.

I.D – Limitations du modèle de la lame infinie pour l'analyse de l'efficacité de blindage d'une enceinte.

I.D.1) Pour l'allure de l'efficacité de blindage pour le champ électrique, l'allure générale de la courbe obtenue est satisfaisante. En revanche, aux faibles fréquences, le modèle de la lame infinie ne

coïncide pas du tout avec les résultats calculés dans le cas d'une enceinte sphérique pour l'efficacité de blindage en champ magnétique.

II.D.2) En haute fréquence, le modèle de la lame infinie est suffisant. Pour $f = 1$ GHz par exemple, $\lambda_0 = 30$ cm $\gg d = 0.25$ mm : l'onde est très fortement atténuée après la traversée de la lame.

b) En basse fréquence, le modèle ne permet pas d'expliquer les résultats obtenus, en particulier pour le champ magnétique. Dans le cas de l'enceinte sphérique, l'onde à l'intérieur de l'enceinte résulte de réflexions multiples sur les parois de l'enceinte. L'onde étant moins atténuée à la traversée du métal qu'en haute fréquence, ce phénomène sera sensible. En particulier, le champ magnétique à l'intérieur de l'enceinte peut être considéré comme la superposition du champ extérieur et du champ créé par les courants électriques qui apparaissent dans les parois conductrices de l'enceinte (qui forment des boucles fermées).

Partie II – Efficacité de blindage en régime quasi - permanent.

II.A- Préliminaires.

II.A.1) Il faut que les dimensions de l'enceinte soient très faible par rapport à la longueur d'onde de l'onde dans le vide. Dans ce cas, au niveau de la structure, les champs pourront être considérés comme uniformes. (Pour des fréquences inférieures à 1 MHz, la longueur d'onde est supérieure à 300 m, les hypothèses simplificatrices sont tout à fait valables.)

II.A.2) Le champ électrique et le champ magnétique sont a priori la superposition du champ incident et des champs réfléchis et/ou transmis par l'enceinte ou encore des champs rayonnés par les courants qui prennent naissance dans la paroi conductrice de l'enceinte. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi – stationnaires, ces champs sont négligeables devant le champ incident.

Dans le calcul de S_E par exemple, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0,inc} + \delta\mathbf{E}$ avec $\|\delta\mathbf{E}\| \ll \|\mathbf{E}_{0,inc}\|$, on pourra donc confondre, au premier ordre, \mathbf{E}_0 et $\mathbf{E}_{0,inc}$.

$$\frac{\|\mathbf{E}_0\|}{\|\mathbf{B}_0\|} \approx \frac{\|\mathbf{E}_{0,inc}\|}{\|\mathbf{B}_{0,inc}\|} = c.$$

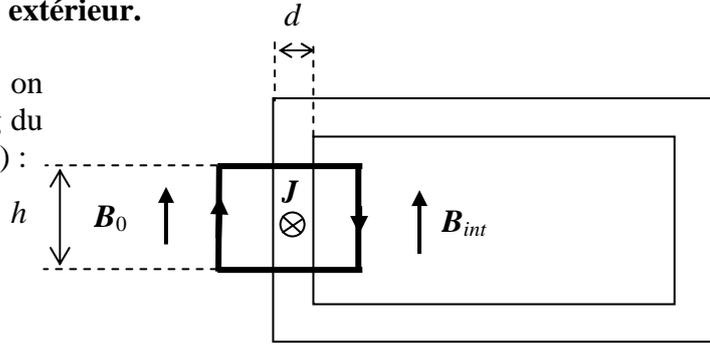
II.A.3) L'approximation des régimes quasi – stationnaires consiste à négliger les phénomènes de propagation. Dans l'équation de Maxwell-Ampère, le terme $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est négligeable devant $\text{rot } \mathbf{H}$, ce qui revient à dire que la longueur d'onde λ_0 est très supérieure aux dimensions caractéristiques du système.

II.A.4) Théorème d'Ampère : $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enlacés} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ où S est une surface qui s'appuie sur le contour C .

Loi de Faraday : $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ où Φ_B est le flux de \mathbf{B} à travers une surface s'appuyant sur le contour C .

II.B- Action du champ magnétique extérieur.

II.B.1- a) Dans les deux cas, on applique le théorème d'Ampère le long du contour rectangulaire ci-contre (en gras) :



Le théorème d'Ampère donne : $\int_C \underline{H} d\mathbf{l} = (\underline{B}_0 - \underline{B}_{int})h/\mu_0 = \int_0^d \underline{J}(x)h dx$.

. Cas a : $\underline{J}(x) = \underline{J}_0$ donc $\underline{B}_{int} = \underline{B}_0 - \mu_0 \underline{J}_0 d$;

. Cas b : $\underline{J}(x) = \underline{J}_0 \exp(-(1+i)x/\delta)$ donc $\underline{B}_{int} = \underline{B}_0 - \mu_0 \underline{J}_0 \frac{\delta}{1+i} (1 - \exp(-(1+i)d/\delta))$.

b) D'après la loi d'Ohm, $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ dans le conducteur et \underline{E} est continu à l'interface paroi - intérieur donc

. Cas a : $\underline{E}_{int} = \underline{J}_0/\sigma$;

. Cas b : $\underline{E}_{int} = (\underline{J}_0/\sigma) \exp(-(1+i)d/\delta)$.

II.B.2) La circulation du champ électrique \underline{E}_{int} le long d'un rectangle situé dans le plan xOy , au voisinage de la paroi est égale à $L_z \underline{E}_{int}$. D'après la loi de Faraday, elle aussi égale à $-d\Phi_B/dt = i\omega \underline{B}_{int} S_z$ (orientation de la surface, voir figure 4 de l'énoncé).

Donc $L_z \underline{E}_{int} = i\omega S_z \underline{B}_{int}$

II.B.3) . Cas a : $L_z \underline{E}_{int} = i\omega (\underline{B}_0 - \mu_0 \underline{J}_0 d) S_z$

donc $\underline{J}_0 = \frac{i\omega S_z \underline{B}_0}{L_z/\sigma + i\omega \mu_0 d S_z}$; $\underline{E}_{int} = \frac{i\omega S_z \underline{B}_0 / \sigma}{L_z/\sigma + i\omega \mu_0 d S_z}$ et $\underline{B}_{int} = \frac{L_z \underline{B}_0 / \sigma}{L_z/\sigma + i\omega \mu_0 d S_z}$.

. Cas b : $L_z \underline{E}_{int} = i\omega \left(\underline{B}_0 - \mu_0 \underline{J}_0 \frac{\delta}{1+i} \exp(-(1+i)d/\delta) \right) S_z$

donc $\underline{J}_0 = \frac{i\omega S_z \underline{B}_0}{(L_z/\sigma) \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right) + i\omega \mu_0 S_z \frac{\delta}{1+i} \left(1 - \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right)\right)}$;

$\underline{E}_{int} = \frac{i\omega S_z \underline{B}_0 / \sigma}{(L_z/\sigma) \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right) + i\omega \mu_0 S_z \frac{\delta}{1+i} \left(1 - \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right)\right)}$ et

$\underline{B}_{int} = \frac{L_z \underline{B}_0 / \sigma}{(L_z/\sigma) \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right) + i\omega \mu_0 S_z \frac{\delta}{1+i} \left(1 - \exp\left(- (1+i) \frac{d}{\delta}\right)\right)}$

II.C – Bilan.

II.C.1) Basse fréquences : cas a.

$$\frac{\underline{B}_0}{\underline{B}_{\text{int}}} = \frac{L_z + i\omega\mu_0\sigma d S_z}{L_z} = 1 + i \frac{\omega}{\omega_1} \text{ avec } \omega_1 = \frac{L_z}{\mu_0\sigma d S_z} \text{ donc } S_B = 20\log\left|\frac{\underline{B}_0}{\underline{B}_{\text{int}}}\right| = 10\log\left(1 + (\omega/\omega_1)^2\right).$$

$$\frac{\underline{E}_0}{\underline{E}_{\text{int}}} = \frac{c\underline{B}_0}{i\omega S_z \underline{B}_0} (L_z + i\omega\sigma\mu_0 d S_z) = \mu_0\sigma c d \left(1 - i \frac{\omega_1}{\omega}\right) \text{ donc}$$

$$S_E = 20\log\left|\frac{\underline{E}_0}{\underline{E}_{\text{int}}}\right| = 20\log(\mu_0\sigma c d) + 10\log\left(1 + (\omega_1/\omega)^2\right).$$

Donc : quand $\omega \rightarrow 0$, $S_B \sim 0$ et $S_E \sim 20\log(\mu_0\sigma c d) - 20\log(\omega/\omega_1)$.

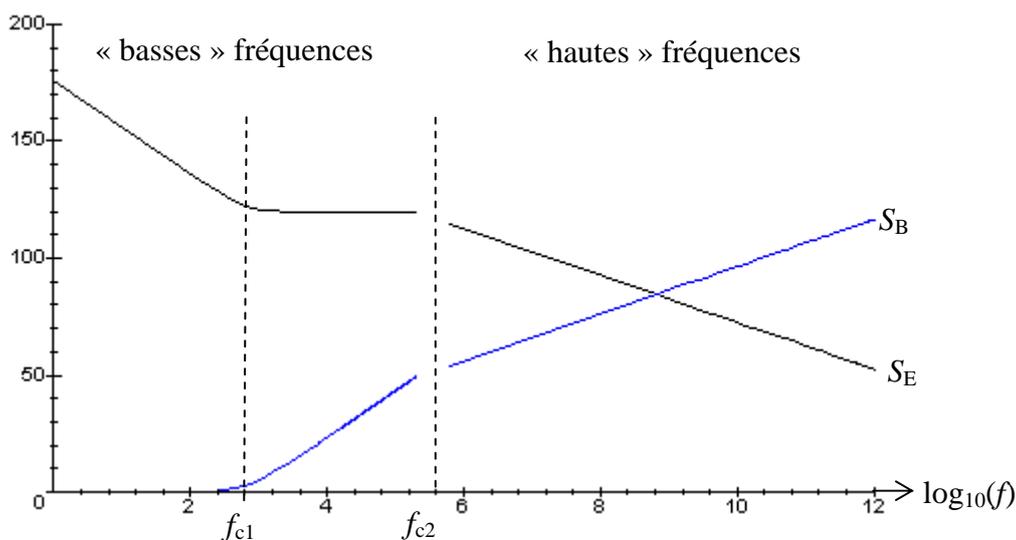
Quand $\omega \gg \omega_1$, $S_B \sim 20\log(\omega/\omega_1)$ et $S_E \sim 20\log(\mu_0\sigma c d)$.

Hautes fréquences : cas b.

$\delta \ll d$ donc $\exp(-(1+i)d/\delta) \approx 0$ d'où, tous calculs faits, $\underline{B}_{\text{int}} \approx \frac{\delta L_z}{S_z} \frac{\underline{B}_0}{1+i}$ et $\underline{E}_{\text{int}} \approx \delta\omega \frac{i}{1+i} \underline{B}_0$.

On en déduit $S_B \approx 20\log\left(\frac{S_z \sqrt{\mu_0\sigma\omega}}{L_z}\right)$ et $S_E \approx 20\log\left(\frac{c\sqrt{\mu_0\sigma}}{\sqrt{\omega}}\right)$.

Allure des courbes :



II.C.2) Les trois fréquences de coupure sont :

• la fréquence f_1 correspondant à ω_1 : $f_{c1} = \frac{L_z}{2\pi\mu_0\sigma d S_z} = 675 \text{ Hz}$;

• la fréquence limitant le domaine « basses fréquences » du domaine « haute fréquence », c'est à dire la fréquence pour laquelle $\delta = d$: $f_{c2} = \frac{1}{\pi\mu_0\sigma d^2} = 405 \text{ kHz}$;

• la fréquence pour laquelle l'approximation du régime quasi - permanent cesse d'être valable, c'est-à-dire la fréquence pour laquelle $\sigma = \varepsilon\omega$: $f_{c3} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = 1.1 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$.

FIN