

COMMANDE DU PLAN HORIZONTAL D'UN EMPENNAGE D'AVION

Remarque préliminaire :

Les calculatrices et les documents ne comportant pas de feuilles volantes sont autorisés.

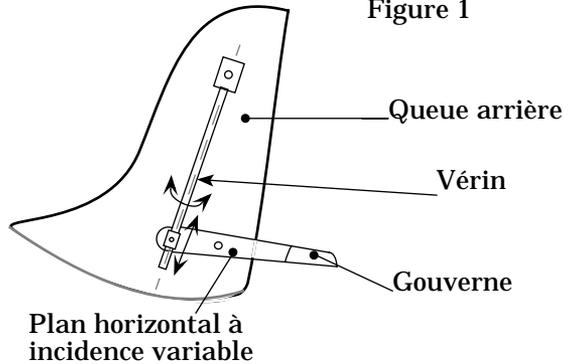
Document remis :

La présente notice comportant 4 pages dactylographiées.

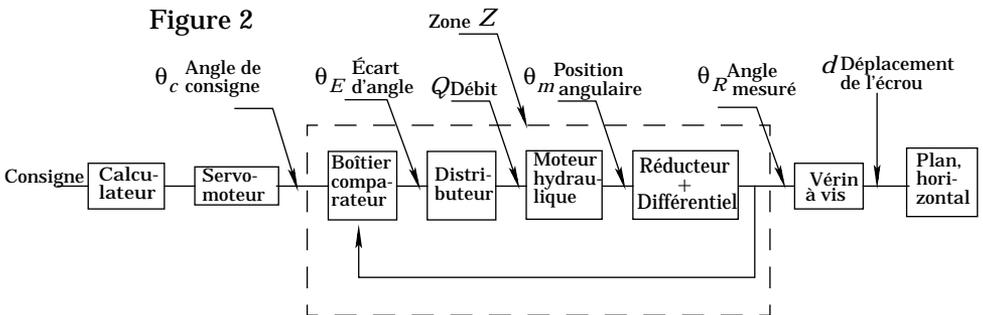
Mise en situation :

Un empennage d'avion est composé de deux parties :

- la première, plan horizontal et gouverne, assure la stabilité en profondeur de l'avion,
- la deuxième, queue arrière, assure la stabilité en direction.

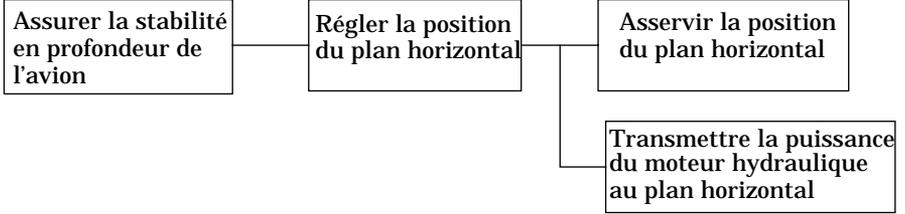


Nous nous intéressons dans ce sujet au système qui permet d'asservir en position le plan horizontal (qui entraîne dans son mouvement la gouverne). Par contre les mouvements relatifs plan horizontal-gouverne ne seront pas étudiés. Le schéma-bloc de ce système est donné ci-dessous :



La commande en position du plan horizontal est assurée par un vérin à vis. Un moteur hydraulique asservi en position, à partir d'une consigne délivrée par un servomoteur, entraîne un réducteur, constitué d'un réducteur à roues coniques et d'un différentiel, lié à la vis du vérin à vis. La rotation de cette vis entraîne la

translation d'un écrou qui permet le déplacement du plan horizontal. Les fonctions de ce système sont décrites ci-dessous :



Travail demandé (durée : trois heures) :

Les parties I et II sont indépendantes et peuvent être traitées par les candidats dans l'ordre de leur choix. Dans toute cette étude, le repère R lié à l'avion (bâti θ) est considéré comme galiléen.

Partie I - Étude de la fonction asservissement

La solution retenue pour le boîtier comparateur (figure 2) est un train épicycloïdal dont le schéma (figure 3) est donné ci-après page 2.

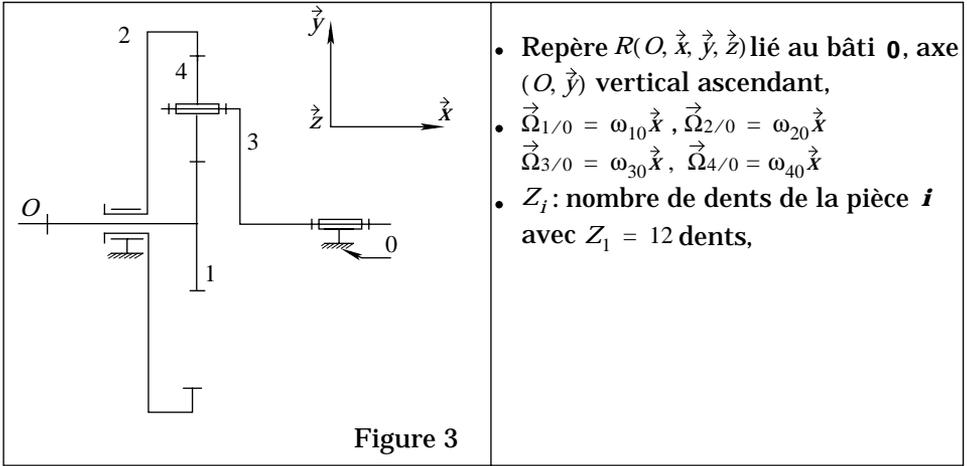
I.A - Immobiliser par rapport au bâti θ , successivement une des trois entrées possibles de ce train épicycloïdal. Établir pour chaque cas, sous forme littérale, en fonction de Z_1 et Z_2 , le rapport ω_{i0}/ω_{j0} des taux de rotation des deux autres entrées i et j accessibles.

I.B - Lorsqu'une des trois entrées possibles du train épicycloïdal est bloquée, le cahier des charges impose $\theta_C/\theta_E = 0,75$ et $\theta_R/\theta_E = -3$.

En fonction des rapports obtenus à la question précédente, préciser alors à quelle partie du train épicycloïdal sont liés respectivement le servomoteur, le vérin à vis et le distributeur.

I.C - Afin de répondre au cahier des charges, déterminer alors le nombre de dents de chacune des roues dentées de ce train épicycloïdal.

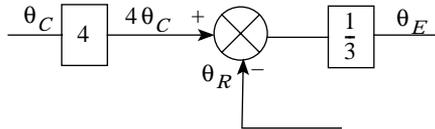
I.D - Déterminer la relation $\theta_E = f(\theta_C, \theta_R)$ lorsqu'aucune des trois entrées possibles du train épicycloïdal n'est bloquée.



- Repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti **0**, axe (O, \vec{y}) vertical ascendant,
- $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}\vec{x}$, $\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20}\vec{x}$
- $\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{30}\vec{x}$, $\vec{\Omega}_{4/0} = \omega_{40}\vec{x}$
- Z_i : nombre de dents de la pièce **i** avec $Z_1 = 12$ dents,

Montrer alors que le boîtier comparateur peut être représenté par le schéma fonctionnel ci-dessous afin que la boucle représentée dans la zone Z (figure 2) soit à retour unitaire.

Figure 4



I.E - Considérons maintenant la zone Z (partie analogique de l'asservissement). Le distributeur délivre un débit Q que l'on peut considérer comme proportionnel à l'écart d'angle θ_E et son gain est noté k_d . La fonction de transfert du moteur hydraulique θ_m/Q peut être représentée par un deuxième ordre avec intégrateur.

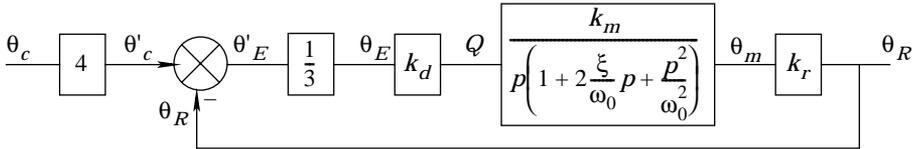
Nous avons
$$\frac{\theta_m}{Q} = \frac{k_m}{p \left(1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$
 avec

- p : variable de Laplace,
- ω_0 : pulsation propre du moteur, liée à son inertie et à celle de l'arbre commandé ainsi qu'à la compressibilité de l'huile,
- ξ : coefficient d'amortissement réduit lié à la compressibilité de l'huile et aux frottements visqueux du moteur.

On prendra : $k_m = 0,6 \text{ rad} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\xi = \sqrt{2}/2$ et $\omega_0 = 400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le réducteur est équivalent à un système à action proportionnelle. Son gain est noté k_r . Le schéma-bloc ci-dessous résume les données qui viennent d'être précisées :

Figure 5



L'arbre de sortie du moteur hydraulique choisi a une fréquence maximale de rotation N_{maxi} égale à $3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Le pas p_v de la vis du vérin à vis est égal à 5 mm . La vitesse maximale de l'écrou doit être de $0,07 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Montrer que le rapport de réduction k_r est égal à $0,28$.

I.F - Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de la position θ_R de la vis, soit θ_R/θ'_E . Faire ensuite l'application numérique pour $k_d = 200 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1}$.

I.G - Pour cette valeur de k_d , tracer dans le plan de Bode le lieu asymptotique en phase et en amplitude de la fonction de transfert θ_R/θ'_E .

I.H - Déterminer la pulsation de coupure approchée ω_{c0} à 0 dB à partir du diagramme asymptotique de module. En déduire la marge de phase correspondante. Déterminer la marge de gain approchée obtenue à partir des diagrammes asymptotiques. Conclure quant au réglage du système.

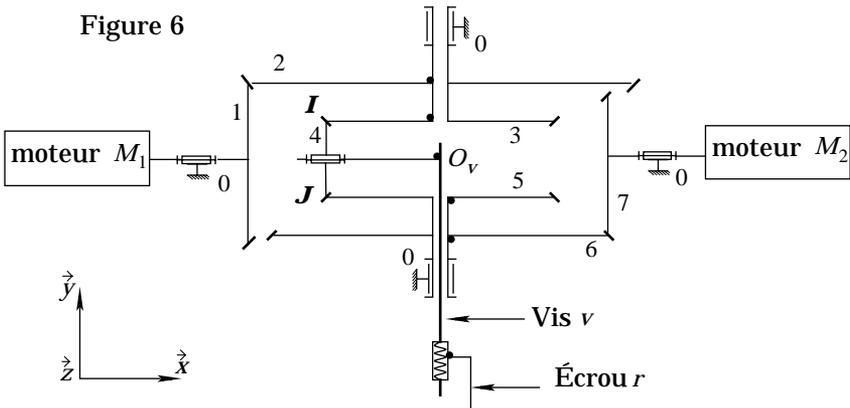
I.I - Déterminer la valeur maximale de k_d pour que le système soit à la limite de la stabilité en utilisant le critère de Routh.

I.J - Le cahier des charges impose que l'écart ε du système d'entrée θ'_c et de sortie θ_R en réponse à une entrée de type rampe, de pente unitaire, ne soit pas supérieur à $0,02 \text{ rad}$. On décide d'imposer une marge de gain réelle de 15 dB . Calculer la valeur du gain k_d correspondant. Pour cette valeur de k_d , vérifier que l'écart ε du système en réponse à une entrée de type rampe, de pente unitaire, n'est pas supérieur à $0,02 \text{ rad}$. Conclure en précisant quelles sont les conséquences d'une augmentation de k_d sur les performances, en précision et en stabilité, de l'asservissement étudié.

Partie II - Étude de la chaîne de puissance

La chaîne de puissance est composée de deux moteurs hydrauliques, d'un réducteur à roues coniques, d'un différentiel et d'un vérin à vis. Un seul moteur hydraulique est en fonctionnement, le deuxième permet de pallier à toute avarie du premier. Un schéma cinématique simplifié de la chaîne de puissance est donné ci-dessous (voir figure 6). Les moteurs hydrauliques M_1 et M_2 sont identiques. La transmission de puissance de chaque moteur hydraulique vers la vis v est assurée par un réducteur à roues coniques (réducteur composé des roues 1 et 2 pour le moteur M_1 , réducteur composé des roues 6 et 7 pour le moteur M_2). Un différentiel, constitué des roues dentées 3, 4, 5 et du porte-satellites v , complète le dispositif. Les roues dentées 2 et 3 sont en liaison encastrement ainsi que les roues dentées 5 et 6. Le centre d'inertie d'une roue dentée i est noté O_i (ce point est bien évidemment sur l'axe de symétrie de la roue dentée) et son rayon primitif est noté R_{pi} . Le point O_v est tel que $\vec{O}_v\vec{O}_4 = -R_{p3}\vec{x} = -R_{p5}\vec{x}$. Nous avons : $Z_1 = 18$ dents, $Z_2 = 32$ dents, $Z_3 = 33$ dents, $Z_4 = 13$ dents, $Z_5 = 33$ dents, $Z_6 = 25$ dents, $Z_7 = 14$ dents. Le mouvement de rotation, autour de l'axe \vec{u} , d'un solide k par rapport à un solide i est caractérisé par le vecteur de rotation : $\vec{\Omega}_{k/i} = \omega_{ki}\vec{u}$.

Figure 6



Nous allons dans cette partie :

- vérifier que les moteurs M_1 et M_2 permettent la même cinématique pour la vis v ,
- justifier le rôle du différentiel,
- vérifier le dimensionnement des moteurs hydrauliques M_1 et M_2 .

II.A - Soit I le point de contact des roues dentées 3 et 4 (voir figure 6). Déterminer $\vec{V}(I \in 3/4)$ en fonction de ω_{3v} et ω_{4v} . Sachant qu'il y a roulement sans

glissement au point I entre les roues dentées 3 et 4, en déduire une relation scalaire entre ω_{3v} , ω_{4v} , Z_3 et Z_4 .

II.B - Soit J le point de contact des roues dentées 4 et 5 (voir figure 6). Déterminer $\vec{V}(J \in 5/4)$ en fonction de ω_{4v} et ω_{5v} . Sachant qu'il y a roulement sans glissement au point J entre les roues dentées 5 et 4, en déduire une relation scalaire entre ω_{4v} , ω_{5v} , Z_4 et Z_5 .

II.C - Sachant que $Z_3 = Z_5$, en déduire alors une relation entre ω_{30} , ω_{50} et ω_{v0} .

II.D - Si $\vec{\Omega}_{1/0} = +\omega_{m0}\vec{x}$ avec $\omega_{m0} > 0$ et $\vec{\Omega}_{7/0} = \vec{0}$, calculer ω_{v0} en fonction de ω_{m0} et de Z_j . Faire l'application numérique.

Si $\vec{\Omega}_{7/0} = +\omega_{m0}\vec{x}$ avec $\omega_{m0} > 0$ et $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$, calculer ω_{v0} en fonction de ω_{m0} et de Z_j . Faire l'application numérique.

Pour un sens de rotation imposé à la vis v , conclure quant au sens de rotation des moteurs M_1 et M_2 . Comparer le rapport de réduction de cet ensemble réducteur-différentiel avec le résultat trouvé à la question I.E. Justifier le rôle du différentiel constitué des pièces 3, 4, 5 et v .

II.E - Considérons maintenant uniquement le sous-système qui permet la transmission de puissance entre la vis v et le plan horizontal e (voir figure 7). La vis v est en liaison pivot d'axe (O_v, \vec{y}_c) avec le carter c . Celui-ci est en liaison pivot d'axe $(O_v, \vec{z}) = (O_v, \vec{z}_c)$ avec le bâti 0, et en liaison hélicoïdale d'axe (O_v, \vec{y}_c) avec l'écrou r . Le plan horizontal e est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}) = (B, \vec{z}_c) = (B, \vec{z}_e)$ avec le bâti 0. Le mouvement de l'écrou r est transmis au plan horizontal e par l'intermédiaire de la liaison $L_{e/r}$.

Le paramétrage est donné sur la figure 7 : $\overrightarrow{O_v G_r} = -\lambda(t)\vec{y}_c$ avec G_r centre d'inertie de l'écrou r , $\overrightarrow{O_v A} = a\vec{x}_c - (\lambda(t) + h)\vec{y}_c$ et $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_e$.

Les paramètres a , b et h sont constants, mais $\lambda(t)$ dépend du temps. Le pas de la liaison hélicoïdale $L_{v/r}$ est noté p_v . Lorsque le paramétrage n'est pas défini, on utilise, pour le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide j par rapport au solide i , la notation suivante :

$$\{T_c(S_j/S_i)\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{j/i} = \alpha_{ji}\vec{x}_c + \beta_{ji}\vec{y}_c + \gamma_{ji}\vec{z}_c \\ \vec{V}(A \in S_j/S_i) = u_{ji}\vec{x}_c + v_{ji}\vec{y}_c + w_{ji}\vec{z}_c \end{cases}$$

Tracer le graphe des liaisons, en précisant leurs caractéristiques, puis écrire au point A , dans la base $(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$, le système d'équations issu de la fermeture cinématique de ce graphe. Déterminer alors le nombre de degrés de liberté minimal que doit avoir la liaison $L_{e/r}$ afin que ce sous-système soit mobile et isostatique.

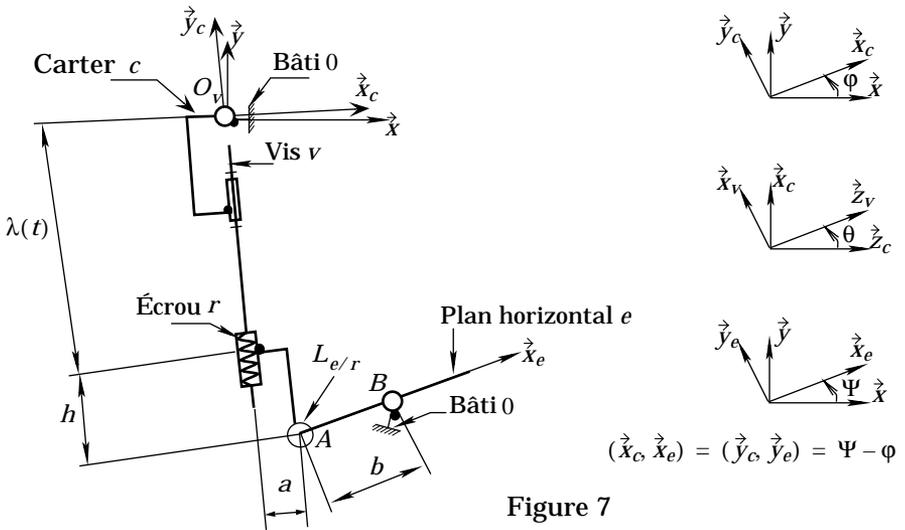


Figure 7

II.F - Le constructeur a choisi une liaison rotule de centre A pour réaliser la liaison $L_{e/r}$. En fonction des résultats de la question précédente, déterminer la relation $\lambda = f(\theta)$. En déduire la relation $\lambda = f(\theta)$ en supposant les conditions initiales nulles.

II.G - Le repère $R(O_v, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti 0 et l'axe (O_v, \vec{y}) est vertical ascendant. L'ensemble F_v des actions de frottement qui s'opposent à la rotation de la vis v par rapport au bâti 0 est tel que $\vec{M}(O_v, F_v \rightarrow v) \cdot \vec{y}_c = -\vartheta \dot{\theta}$ (ϑ : coefficient de frottement visqueux). Les frottements dans la liaison hélicoïdale sont supposés nuls car cette liaison est réalisée par une vis à rouleaux. Le torseur des interefforts transmissibles par la liaison $L_{e/r}$ est un glisseur dont le support passe par A : $\vec{R}(e \rightarrow r) = X_{er}\vec{x}_c + Y_{er}\vec{y}_c + Z_{er}\vec{z}_c$. Le couple $\vec{C} = C\vec{y}_c$ qui s'applique sur la vis v en sortie du différentiel doit permettre la rotation du plan horizontal e autour de l'axe (B, \vec{z}_c) .

En isolant successivement la vis v puis l'écrou r , appliquer les théorèmes généraux de la Dynamique afin de déterminer le couple C en fonction de Y_{er} , θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, φ , $\dot{\varphi}^2$ et des caractéristiques données ci-après.

Caractéristiques cinétiques :

Vis v	Écrou r	Plan horizontal e
<ul style="list-style-type: none"> • centre d'inertie G_v tel que $\overrightarrow{O_v G_v} = -k\vec{y}_c.$ • masse m_v. • matrice associée à l'opérateur d'inertie, exprimée dans la base $(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$: $\bar{I}(O_v, v) = \begin{bmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & B_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> • centre d'inertie G_r tel que $\overrightarrow{O_v G_r} = -\lambda(t)\vec{y}_c.$ • masse m_r. • matrice associée à l'opérateur d'inertie, exprimée dans la base $(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$: $\bar{I}(G_r, r) = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> • centre d'inertie G_e tel que $\overrightarrow{B G_e} = m\vec{x}_e + n\vec{y}_e$ • masse m_e. • matrice associée à l'opérateur d'inertie, exprimée dans la base $(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$: $\bar{I}(G_e, r) = \begin{bmatrix} A_e & -F_e & -E_e \\ -F_e & B_e & -D_e \\ -E_e & -D_e & C_e \end{bmatrix}$

Faire l'application numérique en faisant l'hypothèse que les coefficients des termes faisant intervenir les paramètres θ et φ et leurs dérivées première et/ou seconde sont négligeables, sachant que : $p_v = 5 \text{ mm}$ et $Y_{er} = 18940 \text{ daN}$.

II.H - Sachant que le rendement η de toute la chaîne de transmission de puissance est égal à 0,9, vérifier que le moteur hydraulique M_1 (ou M_2) qui peut fournir un couple moteur de 60 N.m est correctement dimensionné.

••• FIN •••
