MATHÉMATIQUES I

Objet du problème :

Il s'agit de calculer par plusieurs méthodes les intégrales I_n définies dans la partie II.

Notations : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Partie I -

I.A - Soit f une application de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin xt \, dt = 0$.

I.B - On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin nt}{\sin t} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

I.B.1) Justifier l'existence de J_n.

I.B.2) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

I.B.3) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

I.B.4) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$, et en déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

I.B.5) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

I.C -

I.C.1) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a \dfrac{\sin nt}{\sin t} dt$.

Filière PSI

I.C.2) Soit $a \in \left]0, \pi\right[$. Prouver que l'application f telle que

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } [0, a].$$

On pourra écrire : $f(x) = \dfrac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}$, pour $x \in \left]0, a\right]$.

I.C.3) Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin nt}{t}dt - \int_0^a \frac{\sin nt}{\sin t}dt\right) \text{ lorsque } a \in \left]0, \pi\right[.$$

I.C.4) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin nt}{t}dt \text{ lorsque } a = \frac{\pi}{2}, \text{ puis } a < \frac{\pi}{2}, \text{ puis } a > \frac{\pi}{2}.$$

I.D - En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$, montrer que la fonction $F : X \mapsto \int_0^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ admet $\frac{\pi}{2}$ pour limite lorsque x tend vers en $+\infty$.

On posera $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

I.E - En utilisant $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$, montrer que l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right] \text{ n'est pas intégrable sur } \left]0, +\infty\right[.$$

Partie II -

II.A - Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'application

$\left[t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right]$ est intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$$

II.B - Montrer que : $I_1 = I_2$ (I_1 a été définie en I.D).

II.C - Montrer : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

II.D - Montrer que : $I_n > 0$ pour $n \geq 1$. (On pourra utiliser une partition judicieuse de l'intervalle d'intégration).

Partie III -

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on considère les applications

$g_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (\sin t)^n$

et $h_{n,k} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h_{n,k} = \frac{1}{t^{n-k}} g_n^{(k)}(t)$,

où $g_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de g_n.

III.A - Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, $h_{n,k}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B - Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, la valeur de l'expression

$(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$ ne dépend pas de k.

III.C - Pour $n \geq 2$, prouver que la fonction $G : X \mapsto \int_0^X h_{n,k}(t)\, dt$ admet en $+\infty$ une limite finie, notée $\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$, et que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t) dt = (n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt .$$

III.D - En déduire, pour $n \geq 2$: $I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g_n^{(n-1)}(t) dt$.

III.E -

III.E.1) Établir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$ les résultats suivants :

$$4^p (\sin t)^{2p} = C_{2p}^p + 2 \sum_{k=1}^{p} (-1)^k C_{2p}^{p-k} \cos(2kt) \tag{1}$$

$$4^p (\sin t)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} \sin(2k+1)t \tag{2}$$

III.E.2) En déduire, en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$, une expression de I_n du type $q_n \pi$ où q_n est une somme de nombres rationnels (on pourra faire intervenir I_1 dans les calculs).

Retrouver la valeur de I_2, puis calculer I_3 et I_4.

Partie IV -

IV.A - Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel positif l'existence de l'intégrale :

$$A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\, dt .$$

IV.B - Montrer que l'application $[x \mapsto A_n(x)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle vérifie, pour tout $n \geq 2$, l'équation différentielle :

$$(E_n) \ : \ y'' - n^2 y = n(n-1)A_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n .$$

IV.C -

IV.C.1) Résoudre l'équation (E_2).

IV.C.2) En déduire une expression de A_2 à l'aide de I_2 (on considérera les valeurs de $A_2(0)$ et $A'_2(0)$).

IV.C.3) Montrer que $A_2(x) = O(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et retrouver ainsi la valeur de I_2.

IV.D - Exprimer A'_1 à l'aide de A''_2 et en déduire une expression de A_1.

IV.E - En procédant de manière analogue à IV.C, obtenir A_3 et I_3.

IV.F - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n peut se mettre sous la forme :

$$A_n(x) = e^{-x} Q_n(e^{-x}) + R_n(x) ,$$

où Q_n et R_n sont des fonctions polynômes vérifiant :

le degré de R_n est égal à $n-1$;

le degré de Q_n est égal à n ;

R_n a même parité que $n-1$;

Q_n a même parité que n .

••• FIN •••
