

Partie I – Généralités sur la microscopie

I.A- Ordres de grandeurs.

Ordre de grandeur d'un globule sanguin : environ 10^{-5} m.

Ordre de grandeur d'une structure cristalline : environ 10^{-9} m.

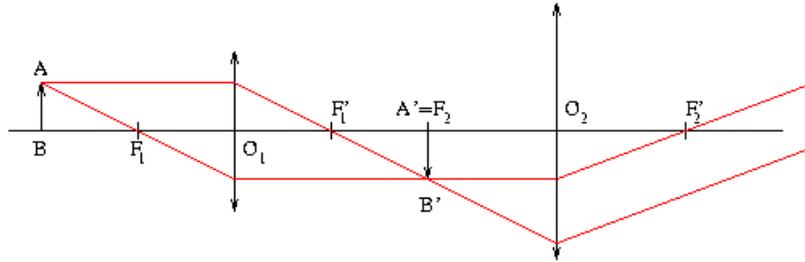
Ordre de grandeur d'un atome : environ 10^{-10} m.

Si on veut pouvoir observer à peu près correctement ces objets le pouvoir de résolution devrait être environ de d'un dixième de ces valeurs soit :

- pour un microscope optique environ 10^{-6} m.
- pour un microscope électronique environ 10^{-10} m.
- pour un microscope à sonde locale environ 10^{-11} m.

I.B- Microscope optique : étude géométrique.

I.B.1.



I.B.2.a. L'angle sous lequel on voit un objet à l'infini à travers l'oculaire est $\alpha' = \frac{AB}{O_2 F'_2}$. L'angle sous lequel on voit

un objet à l'œil nu à la distance minimale de vision est $\alpha = \frac{AB}{\delta}$. Le grossissement commercial est donc de :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\delta}{f'_2}, \text{ et donc } \boxed{f'_2 = \frac{\delta}{g}}. \text{ A.N. } \boxed{f'_2 = 2,5 \text{ cm}}.$$

I.B.2.b. L'image de l'objet par le microscope étant à l'infini, l'image par l'objectif de cet objet est dans le plan focal objet de l'oculaire i.e. on a : $A \xrightarrow{\text{objectif}} A' = F_2 \xrightarrow{\text{oculaire}} \infty$. Comme le grandissement de l'objectif est

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{F'_1 A'}{F'_1 O_1} = \frac{F'_1 F_2}{F'_1 O_1}, \text{ on a donc } \boxed{f'_1 = \frac{\Delta}{|G|}}. \text{ A.N. } \boxed{f'_1 = 0,4 \text{ cm}}.$$

D'autre part $G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O_1 A'}{O_1 A} = \frac{O_1 F_2}{O_1 A}$ d'où $\overline{O_1 A} = \frac{O_1 F'_1 + F'_1 F_2}{G} = \frac{f'_1 + \Delta}{-|G|}$, i.e. $\boxed{\overline{O_1 A} = -\frac{\Delta}{G^2} - \frac{\Delta}{G}}$. A.N.

$$\boxed{\overline{O_1 A} = -0,41 \text{ cm}}.$$

I.B.2.c. On vient de calculer la position de l'objet quand l'œil accommode à l'infini. Si l'œil regarde à une distance de δ à travers le microscope alors l'objet A_1 est tel que $A_1 \xrightarrow{\text{objectif}} A_2 \xrightarrow{\text{oculaire}} A_3$, avec $\overline{A_3 F'_2} = \delta$. Comme

$$\overline{F'_2 A_3} \cdot \overline{F_2 A_2} = -f_2'^2 \text{ et } \overline{F'_1 A_2} \cdot \overline{F_1 A_1} = -f_1'^2, \quad \overline{F_1 A_1} = -\frac{f_1'^2}{F'_1 A_2} = -\frac{f_1'^2}{F'_1 F_2 + F_2 A_2} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{\delta}}$$

$$\overline{O_1 A_1} = -f_1' - \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{\delta}}. \text{ A.N. } \boxed{\overline{O_1 A_1} - \overline{O_1 A} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}.$$

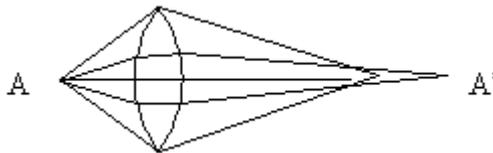
La mise au point doit donc être faite de manière très précise.

I.B.2.d. Si $AB \xrightarrow{\text{objectif}} A'B' \xrightarrow{\text{oculaire}} \infty$ le grossissement commercial est $g_c = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \frac{\delta}{f_2'}$ i.e.

$$g_c = \left| G \right| \frac{\delta}{f_2'}. \text{ A.N. } g_c = 400.$$

I.B.3. Si l'objectif est plongé dans l'air alors $n = 1$, d'où $\sin u = 0,65$ et $u = 40,5^\circ$.

Les rayons arrivant sur l'objectif avec un angle d'incidence important, le microscope n'est pas utilisé dans les conditions de Gauss. L'aberration à corriger est l'aberration de sphéricité : les rayons ne convergent pas au même point selon qu'ils traversent la lentille près ou loin de son axe. L'image A' de A est entourée d'un halo dû aux rayons éloignés de l'axe.



Cette aberration est réduite en canalisant progressivement la lumière par plusieurs lentilles successives, chacune travaillant sous incidence voisine de la normale et déviant plus faiblement les rayons.

Le diamètre de l'objectif est : $D = 2O_1A \tan u$, i.e. $D = 7,0 \text{ mm}$.

I.B.4. Le cercle oculaire étant l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire on a donc, si C est la position du cercle oculaire : $O_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} C$ et $\overline{F_2' C} \cdot \overline{F_2 O_1} = -f_2'^2$ d'où $\overline{F_2' C} = -\frac{f_2'^2}{F_2 F_1' + F_1' O_1} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}$. A.N.

$$\overline{F_2' C} = 0,38 \text{ cm}. \text{ La taille du cercle oculaire } D' \text{ est telle que : } \frac{D'}{D} = \left| \frac{F_2 O_2}{F_2 O_1} \right| = \frac{f_2'}{\Delta + f_1'}. \text{ A.N. } D' = 1,07 \text{ mm}.$$

Le cercle oculaire étant le plus petit cercle par où émerge tous les rayons c'est celui où l'œil recueille toute la lumière. Un grossissement élevé ne va pas améliorer le pouvoir séparateur qui est limité par la diffraction.

I.C- Pouvoir séparateur.

I.C.1. Les directions dans lesquelles la lumière est transmise sont telles que les interférences doivent être constructives i.e. telles que tous les rayons lumineux soient en phase. On a donc $\frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta = 2k\pi$ où k est un

entier relatif. On a donc $\sin \theta = \frac{k\lambda_0}{d}$.

I.C.2. La connaissance de l'angle θ pour $k = 1$ (1^{er} ordre) donne la valeur du pas du réseau $d = \frac{\lambda_0}{\sin \theta_1}$.

L'angle maximum des rayons arrivant sur le microscope étant égal à u , si l'on veut avoir accès au pas du réseau il faut que $\theta_1 < u$.

I.C.3. À la limite on a $\theta_1 = u$ i.e. $\sin \theta_1 = \sin u$ d'où $\frac{\lambda_0}{d_{\min}} = \omega_0$ et donc $d_{\min} = \frac{\lambda_0}{\omega_0}$.

I.C.4. Le coefficient 0,61 provient du fait que le microscope à une symétrie de révolution que les calculs précédents ne prennent pas en compte (le réseau est formé de traits parallèles).

On peut améliorer le pouvoir séparateur en augmentant ω_0 ce qui est très difficile techniquement et aussi à cause des aberrations optiques que cela entraîne. On peut aussi diminuer la longueur d'onde, mais cela pose aussi d'autre problème si la longueur d'onde devient trop faible (U.V. ou rayon X).

I.C.5. Compte tenu des valeurs de l'énoncé on a $d_{\min} = 0,55 \mu\text{m}$ qui est petit devant la taille d'un globule sanguin ($\approx 10 \mu\text{m}$). Le microscope peut donc observer les globules sanguins.

I.C.6. D'après ce qui précède le microscope ne laisse passer que les rayons faiblement inclinés i.e. d'après le I.C.3. les ordres k petit. C'est donc un filtre passe-bas spatial.

I.D- Microscope électronique.

I.D.1. L'énergie cinétique d'un électron accéléré sous une d.d.p. de U est $\frac{1}{2}mv^2 = eU$, d'où $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ et

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eU}{m}}} \text{ i.e. } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \text{ A.N. } \lambda = 1,23 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

I.D.2. D'après la formule de Rayleigh on a donc $d_{\min} = 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. On a donc un pouvoir séparateur environ 10^5 fois plus faible que celui du microscope optique. (Remarque : l'ouverture numérique semble bien élevée pour un microscope électronique).

I.D.3. Si on augmente l'énergie des faisceaux pour augmenter la résolution il y a risque de destruction de l'objet par rupture des liaisons chimiques, ionisation des atomes ou molécules ou autres phénomènes.

Partie II – Déformation d'une poutre

II.A- Poutre dans un champ de pesanteur.

II.A.1.a Le poids de la poutre pour une longueur ds est : $d\vec{F} = \lambda ds \vec{g}$

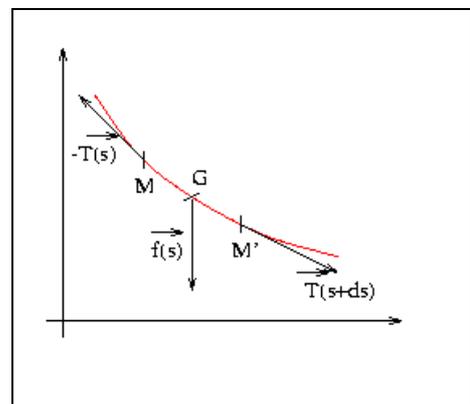
d'où la densité linéique de force de pesanteur est : $\vec{f}(s) = -\lambda g \vec{e}_y$.

II.A.1.b

Le tronçon de longueur ds est soumis à son poids, à la force exercée par le tronçon $[0, s]$ et la force exercée par le tronçon $[s + ds, L]$. On

donc : $\sum \vec{F} = -\lambda g \vec{e}_y ds + \vec{T}(s + ds) - \vec{T}(s)$ i.e.

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{d\vec{T}}{ds} - \lambda g \vec{e}_y \right) ds.$$



II.A.1.c Le moment en G du poids est nul puisque le poids s'applique au centre de gravité du système.

Le moment des forces exercées par le tronçon $[s + ds, L]$ sur le système est :

$$\vec{M}_{M'}(G) = \vec{\Gamma}(s + ds) + \vec{T}(s + ds) \wedge \vec{M}'G.$$

De même le moment exercée par le tronçon $[0, s]$ sur le système est : $\vec{M}_M(G) = -\vec{\Gamma}(s) - \vec{T}(s) \wedge \vec{MG}$.

Le moment résultant est donc : $\vec{M}(G) = \vec{\Gamma}(s + ds) - \vec{\Gamma}(s) + \vec{T}(s + ds) \wedge \vec{M}'G - \vec{T}(s) \wedge \vec{MG}$.

Compte tenu du fait que le G est le milieu de MM' , on a donc $\vec{MG} = \frac{ds}{2} \vec{e}_t(s)$ au 1^{er} ordre et

$\vec{M}'G = -\frac{ds}{2} \vec{e}_t(s + ds)$ d'où $\vec{M}(G) = \frac{d\vec{\Gamma}}{ds} ds - \frac{ds}{2} \vec{T}(s + ds) \wedge \vec{e}_t(s + ds) - \frac{ds}{2} \vec{T}(s) \wedge \vec{e}_t(s)$ et donc au 1^{er}

ordre en ds : $\vec{M}(G) = \left[\frac{d\vec{\Gamma}}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) \right] ds$.

II.A.1.d. Comme le tronçon est à l'équilibre la somme des forces et des moments est nulle d'où : $\frac{d\vec{T}}{ds} - \lambda g \vec{e}_y = 0$ (1')

et $\frac{d\vec{\Gamma}}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = 0$ (2').

II.A.2.a. L'équation (1') en projection sur l'axe Ox donne : $\frac{dT_x}{ds} = 0$ d'où $T_x(s) = T_0$.

II.A.2.b. L'équation (1') en projection sur l'axe Oy donne : $\frac{dT_y}{ds} = \lambda g$.

II.A.2.c. L'équation (2') est l'équation recherchée : $\boxed{\frac{d\vec{\Gamma}}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = 0}$.

II.B- Application à des petites déformations élastiques d'une poutre.

II.B.1.a. Par définition $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Comme l'angle θ est petit, $dy = \tan \theta dx \ll dx$ d'où $\boxed{ds = dx}$.

Par construction $dy = \eta(s + ds) - \eta(s) = \frac{d\eta}{ds} ds \approx \frac{d\eta}{dx} dx$ d'où $n'(x) \approx \frac{dy}{dx} = \tan \theta \approx \theta$ d'où $\boxed{\eta' = \theta}$.

II.B.1.b. D'après les expressions précédentes, $\vec{\Gamma} = C \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \vec{e}_z \approx C \theta' \vec{e}_z$ i.e. $\boxed{\vec{\Gamma} = C \eta'' \vec{e}_z}$.

II.B.1.c D'après l'équation (2), on a, compte tenu des résultats précédents :

$0 = \frac{d\vec{\Gamma}}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = C \eta''' \vec{e}_z + \vec{e}_t \wedge (T_0 \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y) = (C \eta''' - T_0 \sin \theta + T_y \cos \theta) \vec{e}_z$ d'où

$\boxed{T_y = -C \eta''' + T_0 \eta'}$.

II.B.2.a. En $x = L$ il n'y a aucune contrainte exercée sur la poutre d'où $\boxed{T_0 = 0}$, $\boxed{T_y(L) = 0}$ et $\boxed{\vec{\Gamma}(L) = 0}$.

II.B.2.b. Comme $\frac{dT_y}{ds} \approx \frac{dT_y}{dx} = \lambda g$ on a $T_y = \lambda g x + A$ et comme $T_y(L) = 0$, on a donc $\boxed{T_y = \lambda g(x - L)}$.

II.B.2.c. Comme la poutre est horizontale en $x = 0$, on a donc $\theta(0) = 0$ et donc $\boxed{\eta'(0) = 0}$.

Comme $\vec{\Gamma}(L) = 0$ et que $\vec{\Gamma} = C \eta'' \vec{e}_z$, $\boxed{\eta''(L) = 0}$.

Comme $T_0 = 0$ et $T_y(L) = 0$ et que $T_y = -C \eta''' + T_0 \eta'$, $\boxed{\eta'''(L) = 0}$.

II.B.2.d. Comme $T_y = -C \eta''' + T_0 \eta'$ et que $T_0 = 0$ et $T_y = \lambda g(x - L)$, on a donc : $\eta''' = -\frac{\lambda g}{C}(x - L)$. Après

intégration et compte tenu des conditions aux limites établies précédemment, on obtient :

$\boxed{\eta(x) = -\frac{\lambda g}{C} \left(\frac{x^4}{24} - L \frac{x^3}{6} + L^2 \frac{x^2}{4} \right)}$

II.B.2.e. On a alors en $x = L$: $\boxed{\eta(L) = -\frac{\lambda g}{8C} L^4}$

II.B.2.f. Application numérique : $\eta(L) = -1,69 \cdot 10^{-12}$ m.

II.B.3.a. Par rapport au cas précédent seul la valeur de $T_y(L)$ change et elle vaut maintenant $T_y(L) = F$. On a alors

$\eta'''(L) = -\frac{F}{C}$. L'équation différentielle du II.B.2.d. restant inchangée il vient alors, après intégration :

$\eta(x) = -\frac{\lambda g}{C} \left(\frac{x^4}{24} + \left(\frac{F}{\lambda g} - L \right) \frac{x^3}{6} + \left(\frac{L^2}{2} - \frac{FL}{\lambda g} \right) \frac{x^2}{2} \right)$ et donc que $\boxed{\eta(L) = \frac{FL^3}{3C} - \frac{\lambda g L^4}{8C}}$.

II.B.3.b. On peut négliger les effets de la pesanteur si $\frac{\lambda g L^4}{8C} < 0,01 \frac{|F|L^3}{3C}$ i.e. si $\boxed{|F| > \frac{300 \lambda g L}{8}}$. A.N.

$|F_{\min}| \approx 10^{-9}$ N.

II.B.3.c Application numérique : ici la pesanteur est négligeable puisque $|F| > |F_{\min}|$ d'où : $\eta(L) = -1,57 \cdot 10^{-9}$ m.

Partie III – Microscopes à sonde locale

III.A – Approche de l'origine de la force atomique

III.A.1) Interaction entre deux atomes.

a) et b) La force est $F = -\frac{dU}{dr} = \frac{12B}{r^{13}} - \frac{6A}{r^7}$.

A l'équilibre, $F=0 \Leftrightarrow r=r_e = \left(\frac{2B}{A}\right)^{1/6} = 3,55 \cdot 10^{-10} m$. La force est répulsive pour $r < r_e$ et attractive pour $r > r_e$.

$$F'(r) = -\frac{156B}{r^{14}} + \frac{42A}{r^8} < 0 \text{ si } r < r_1 = \left(\frac{26B}{7A}\right)^{1/6} = 1,109r_e$$

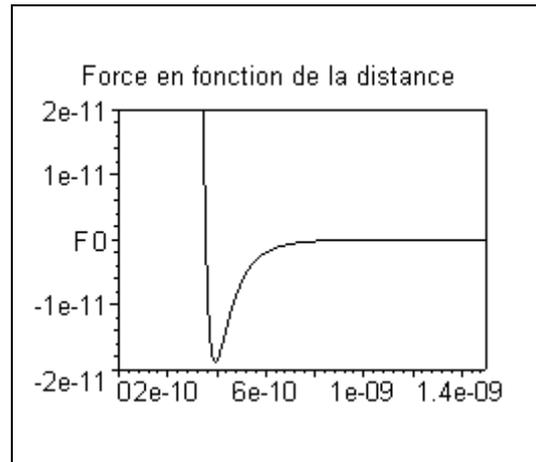
Le minimum de $F(r)$ a lieu pour $r = r_1$.

c)

$$F(0,9r_e) = \frac{12 \cdot 10^{-134}}{(0,9r_e)^{13}} - \frac{6 \cdot 10^{-77}}{(0,9r_e)^7} = 1,56 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

$$F(1,1r_e) = \frac{12 \cdot 10^{-134}}{(1,1r_e)^{13}} - \frac{6 \cdot 10^{-77}}{(1,1r_e)^7} = -1,89 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Au voisinage de la position d'équilibre $F(r)$ est peu linéaire, puisque ces deux résultats ne sont pas l'opposé l'un de l'autre. En fait, le mode vibrant tire partie de cette non linéarité.



D'après II.B.3 c), $F \approx 10^{-10} N \Rightarrow \eta \approx 10^{-11} m$, ce qui donne des ordres de grandeur raisonnables.

III.B – Modes statiques : mode à hauteur constante et mode asservi

III.B.1) La force est une fonction de la distance entre la pointe et la surface. Imposer une force constante revient à imposer une distance constante entre la pointe et la surface.

III.B.2) Le mode à hauteur constante impose de connaître la loi d'interaction entre la pointe et l'échantillon ; la force tombant rapidement à zéro à grande distance, les parties éloignées sont inconnues. Le mode asservi ne nécessite pas cette connaissance ; il suppose seulement que la loi d'interaction soit la même en tout point de la surface ; toutefois, il y a une déformation due au caractère transverse de la force là où la surface est fortement inclinée.

III.B.3) Le déplacement lors du mode à hauteur constante est plus facile à réaliser. Le mode asservi nécessite un balayage plus lent et est plus difficile à réaliser, mais donne des résultats plus faciles à interpréter.

III.B.4) Pour accéder à la loi d'interaction, il faut déplacer verticalement la pointe, mesurer la force en fonction du déplacement et tenir compte éventuellement dans le calcul de la flexion du support de la pointe, qui modifie la distance.

III.C – Etude d'une lame de quartz piézoélectrique

Selon l'énoncé, la force \vec{F} est un vecteur et l'élongation ξ est un scalaire. Nous supposons la force parallèle à l'axe des x .

III.C.1)

Si $\xi = 0$, les relations phénoménologiques deviennent : $F = hD$; $E = \frac{D}{\epsilon}$. La première relation exprime l'élasticité et la deuxième un effet piézoélectrique, l'apparition d'une tension sous l'effet d'un allongement ou d'une force. C'est le comportement de la lame de quartz en l'absence d'action électrique sur elle (voir plus loin, si $D = 0$, il n'y a pas de charges aux extrémités de la lame, ce qui se produit si on ne branche pas les électrodes métalliques).

Si $\xi \neq 0$, les relations phénoménologiques deviennent : $\frac{F}{S} = hD$; $E = \frac{D}{\epsilon}$. La première relation exprime un effet piézoélectrique, l'apparition d'une charge sous l'effet d'un allongement ou d'une force et la deuxième les propriétés diélectriques du quartz. C'est le comportement de la lame si on la colle à un support indéformable.

A l'examen, si vous ne voyez pas la solution de ces questions qualitatives, laissez un blanc sur votre copie et essayez de répondre après avoir résolu le problème ; de toutes les façons, relisez alors vos réponses à ce type de question.

III.C.2) Utilisons les relations phénoménologiques : h a pour unité celle de $\frac{F}{DS}$, soit $\frac{N}{C \cdot m^{-2} \cdot m^2} = V \cdot m^{-1}$; c'est aussi l'unité de h' . Ces deux coefficients ont donc la dimension de champs électriques.

III.C.3)

a) Les équations demandées sont les mêmes en toute généralité et dans l'approximation des régimes quasi-permanents :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \text{ et } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ . S'il n'y a ni champ magnétique, ni charge libre : } \text{div } \vec{D} = 0 \text{ et } \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \text{ .}$$

b) L'énoncé demande de négliger les effets de bord et de supposer les grandeurs comme E, D, ξ fonctions de x, t .

Alors, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ est automatiquement vérifié et $\text{div} \vec{D} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$ implique que D est uniforme.

c) $D = \frac{q(t)}{S}$

III.C.4)

a) $\mu S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x}$

b) Comme $\frac{F}{S} = \mathfrak{E} \frac{\partial \xi}{\partial x} + hD$ et comme D ne dépend pas de x d'après la question 3.b), l'équation précédente devient

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\mathfrak{E}}{\mu} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, soit une équation de d'Alembert ; la vitesse de propagation des ondes acoustiques longitudinales dans

le quartz est $c = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mu}}$. Cette formule est homogène car $\frac{\mathfrak{E}}{\mu}$ s'exprime en $\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

c) $c = \sqrt{\frac{8,6 \cdot 10^{10}}{2,7 \cdot 10^3}} = 5640 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse est élevée, car le milieu est très rigide.

On note que les ondes électromagnétiques se déplacent beaucoup plus vite, ce qui est un argument en faveur de l'hypothèse que le couplage entre ondes électromagnétiques et ondes acoustiques est faible ; ce couplage ne peut pas être déterminé par notre raisonnement, car l'approximation des régimes quasi-permanents ne permet pas faire apparaître d'ondes électromagnétiques.

III.C.5)

a) L'équation de d'Alembert impose qu'à l'équilibre $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$, donc ξ est une fonction affine de x .

Les conditions aux limites sont $\xi(-e/2) = 0$ et $\xi(e/2) = X$, d'où $\xi(x) = \frac{X(x + e/2)}{e}$

b) $E = \frac{u}{e}$ en supposant, ce qui est bien vérifié comme la suite le montrera, $X \ll e$.

c) En combinant les deux principes de la thermodynamique, $dU = TdS + \delta W$, où le travail est la somme du travail mécanique FdX et du travail électrique $udq = EeSdD$, d'où la formule demandée.

d) Admettons que les relations phénoménologiques sont valables pour une transformation rapide, donc adiabatique. L'état de la lame de quartz dépend des trois variables indépendantes (T, F, E) , qu'on peut choisir par des actions extérieures faciles à réaliser. On peut donc considérer qu'il dépend de leurs trois variables conjuguées (S, X, D) , qui sont des variables indépendantes. L'énergie interne est une fonction de ces trois variables et la forme différentielle dU

donnée dans l'énoncé est une différentielle exacte, soit $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial D \partial X} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial D} \right)_{X,S} = eS \left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)_{D,S}$ ou

$$\left(\frac{\partial \frac{F}{S}}{\partial D} \right)_{\frac{\partial \xi}{\partial x}, S} = \left(\frac{\partial E}{\partial \frac{\partial \xi}{\partial x}} \right)_{\frac{F}{S}, S} \Leftrightarrow h = h'$$

e) Eliminons D entre les deux relations phénoménologiques :

$$D = -\frac{\epsilon}{h} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \epsilon E - \epsilon h' \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{X}{e} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\epsilon E}{\epsilon h' - \frac{\epsilon}{h}}$$

$$X = \frac{u}{h - \frac{\epsilon}{\epsilon h}} = \frac{100}{4,3 \cdot 10^9 - \frac{8,6 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{-11} \times 4,3 \cdot 10^9}} = -2,02 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

L'effet piézoélectrique l'emporte sur l'élasticité. On remarque aussi la petitesse du déplacement, de l'ordre de la taille d'un atome. Cette petitesse va convenir au microscope à sonde locale.

III.D – Mode vibrant

III.D.1)

a) Soit x l'allongement du ressort à un instant quelconque et x_{eq} l'allongement du ressort à l'équilibre. Ecrivons pour le mouvement la loi fondamentale de la dynamique et pour l'équilibre la loi de la statique :

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

$$0 = -kx_{eq} + mg$$

Retranchons membre à membre en posant $\eta = x - x_{eq}$: $m\ddot{\eta} = -k\eta$

b)

$$m\ddot{x} = -k(x + \beta(t)) + mg$$

$$0 = -kx_{eq} + mg$$

Retranchons membre à membre : $m\ddot{\eta} = -k(\eta + \beta(t)) \Rightarrow (k - m\omega^2)\underline{\eta} = -k\underline{\beta}$, d'où $H = |\underline{\eta}| = \frac{k\beta_0}{k - m\omega^2}$ qui est

infini pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

c) Par erreur, l'énoncé avait écrit $H = 100S$ au lieu de $H = 100\beta_0$.

Si la force de frottement est proportionnelle à la vitesse de la masse suspendue, l'équation différentielle gouvernant η est linéaire et a une solution sinusoïdale correspondant au régime permanent dont l'amplitude H est proportionnelle à l'amplitude β_0 de l'excitation. Ceci est compatible avec la donnée expérimentale $H = 100\beta_0$.

Si la force de frottement n'est pas proportionnelle à la vitesse, l'amplitude de la réponse n'est pas proportionnelle à celle de l'excitation. Supposons la force de frottement proportionnelle à la puissance n de la vitesse, soit de la forme $-f \text{signe}(\dot{\eta})|\dot{\eta}|^n$; l'équation différentielle est $m\ddot{\eta} + k\eta = k\beta_0 \sin \omega t - f|\dot{\eta}|^n \text{signe}(\dot{\eta})$; en régime permanent,

le travail des forces non conservatives $k\beta_0 \sin \omega t - f|\dot{\eta}|^n \text{signe}(\dot{\eta})$ sur un cycle doit être nul, donc l'amplitude H

des oscillations à la résonance est telle que $k\beta_0$ est de l'ordre de $f(\omega H)^n$: H est de l'ordre de $\frac{1}{\omega} \left(\frac{k\beta_0}{f} \right)^{\frac{1}{n}}$. Ceci

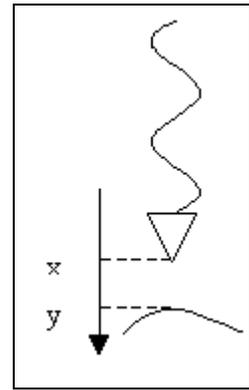
incite à penser que le cas du frottement solide ($n = 0$) pose problème, l'amplitude des oscillations augmentant indéfiniment au cours du temps. Le lecteur intéressé pourra faire tourner avec différentes valeurs le programme maple situé en annexe.

Divisons l'expression de la loi fondamentale de la dynamique par m : $\underline{\eta}(-\omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = -\omega_0^2\underline{\beta}$. Comme la

résonance est aiguë, elle a lieu pour ω voisin de ω_0 et $H = |\underline{\eta}(\omega = \omega_0)| = Q\beta_0 \Rightarrow Q = 100$

d) Il ne faut pas interpréter la notation $F(\eta)$ comme signifiant que F est une fonction de η , puisque η dépend de la position d'équilibre, alors que la position d'équilibre dépend de F et des autres forces. On serait alors en présence d'une force qui dépendrait des autres forces, c'est-à-dire que les forces ne seraient pas additives.

En réalité, la force est une fonction de la distance $y - x$ entre la surface à explorer, d'abscisse y indépendante du temps, et la masse suspendue, d'abscisse x . Cette force a été étudiée à la partie III.A. et a été comptée positive lorsqu'elle est répulsive. Comme nous avons appelé x l'allongement du ressort, l'axe des x est orienté vers le bas ; la force est $-F(y - x)$, où F est la fonction obtenue en III.A ou une fonction analogue.



$$m\ddot{x} = -k(x + \beta(t)) + mg - F(y - x) - \frac{m\omega_0 \dot{x}}{Q}$$

$$0 = -kx_{eq} + mg - F(y - x_{eq})$$

Retranchons membre à membre en posant $\eta = x - x_{eq}$: $m\ddot{\eta} = -k(\eta + \beta(t)) + F(y - x_{eq}) - F(y - x) - \frac{m\omega_0 \dot{\eta}}{Q}$.

Pour les petites les oscillations : $F(y - x_{eq}) - F(y - x) \approx (x - x_{eq})F'(y - x_{eq})$. D'où

$$m\ddot{\eta} = -k^* \eta - k\beta(t) - \frac{m\omega_0 \dot{\eta}}{Q}, \text{ où } k^* = k - F'(y - x_{eq}). \text{ La pulsation de résonance est } \omega = \sqrt{\frac{k^*}{m}}.$$

III.D.2)

a) et b) En II.B.3), on a écrit $\eta(L) = \frac{FL^3}{3C} - \frac{\lambda g L^4}{8C}$ qui est l'analogue de $\eta = \frac{F}{k} - \frac{mg}{k}$. L'analogie conduit donc à

$$k = \frac{3C}{L^3} \text{ et } \frac{mg}{F} = \frac{\frac{\lambda g L^4}{8C}}{\frac{FL^3}{3C}} \Rightarrow m = \frac{3\lambda L}{8}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3C}{L^3}}{\frac{3\lambda L}{8}}} = \sqrt{\frac{8C}{\lambda L^4}} = \sqrt{\frac{8 \times 2,12 \cdot 10^{-12}}{2,93 \cdot 10^{-8} \times (10^{-4})^4}} = 2,41 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

c) Si on déplace la pointe, la fréquence varie si la force varie avec la position donc s'il y a un gradient de force.

d) Un déplacement du pic de résonance vers les basses fréquences indique que $k^* < k \Rightarrow F'(y - x_{eq}) > 0$, ce qui a lieu, vu le graphique de $F(r)$ trouvé en III.A., quand $r > r_1$ où $r_1 = (\frac{13}{7})^{1/6} r_e = 1,109 r_e$ est la distance pour laquelle $F(r)$ est minimum. La force est donc attractive.

Ce résultat traduit le fait que si r est inférieur à r_1 , la force entre la pointe et la surface est une force de rappel et augmente la raideur effective, tandis que si r est supérieur à r_1 , la force entre la pointe et la surface est une force qui tend à écarter la pointe de sa position d'équilibre et donc à diminuer la raideur effective.

$$\text{III.D.3) } \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{k}} = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300 \times (10^{-4})^3}{3 \times 2,12 \cdot 10^{-12}}} = 2,55 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

qui est de l'ordre du dixième de la taille d'un atome ; si c'est possible, il est préférable d'opérer à basse température.

Annexe

Traçons le portrait de phase d'un oscillateur soumis à une force sinusoïdale de fréquence égale à sa fréquence propre et d'amplitude β_0 et à un freinage proportionnel à la puissance n de sa vitesse, en affichant en titre la valeur que la formule $(\beta_0/f)^{1/n}$ attribue à l'amplitude. Les unités de temps et de masse sont telles que la pulsation propre et la masse du mobile sont égales à l'unité.

> pp:= proc(n,beta0,f,x0,v0)

Corrigé de Centrale 2000 PC I

```
> DEtools[phaseportrait]({ diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)+x(t)=beta0*sin(t)-f*signum(v(t))*abs(v(t))^n},[x(t),v(t)],t=0..400,
[[x(0)=x0,v(0)=v0]],stepsize=0.5,linecolour=black,title=convert((beta0/f)^(1/n),string)):
> end:
> pp(2,1,0.1,0,0);
```

