

Veillez envoyer vos corrections éventuelles à lemasquier@wanadoo.fr

Lampe à incandescence et bilans thermiques

Partie I : Lampe à incandescence en régime permanent

I.A- Détermination de la température du filament

I.A.1.

L'expression locale de la loi d'Ohm est : $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$ où \mathbf{j} est le vecteur densité de courant.

I.A.2.

- $R = \rho \frac{L}{S}$

- En utilisant le S.I., l'unité de R est : $[R] = \Omega \cdot m \frac{m}{m^2} = \Omega$

- Application numérique : $L = 4 \text{ cm}$

I.A.3.a.

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \text{ soit } \frac{\Delta L}{L} = 0,01$$

I.A.3.b.

On calcule numériquement : $\begin{cases} \rho(T_0) = 7,67 \cdot 10^{-7} \Omega m \\ \rho(T_A) = 7,125 \cdot 10^{-8} \Omega m \end{cases}$. On en déduit : $\frac{\Delta \rho}{\rho(T_A)} = 9,76$

I.A.3.c.

On voit que les variations relatives de L et de S sont très petites devant celle de ρ . En conséquence, on pourra négliger les variations de L et de S avec T , et considérer que la résistance ne varie avec la température qu'essentiellement à travers ρ .

Donc : $R(T) \approx \rho(T) \frac{L}{S}$ avec $\frac{L}{S} = \frac{R_A}{\rho(T_A)}$, soit : $R(T) = \frac{aT^2 + bT}{aT_A^2 + bT_A} R_A$

I.A.4.

Pour compléter le tableau, il suffit pour chaque couple (U, I) de trouver la valeur de $R = \frac{U}{I}$, puis de chercher la température correspondante à l'aide de l'expression de $R(T)$. On obtient : (les valeurs en italique sont les valeurs manquantes)

$U(V)$	1,25	3,07	4,20	5,60	6,86	8,65
$I(A)$	0,237	0,386	0,460	0,539	0,603	0,685
$R(\Omega)$	5,27	7,95	9,13	10,4	11,4	12,6
$T(K)$	1416	2007	2253	2525	2702	2960

I.B- Bilan énergétique et caractéristique du filament

I.B.1.

La puissance surfacique rayonnée par la surface d'un corps noir à l'équilibre thermique est : $P = \sigma T^4$

- P s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
- T s'exprime en K.
- σ est la constante de Stefan et s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

I.B.2.

Stefan : Physicien Autrichien né en 1835 et mort en 1893 à Vienne. Il énonce en 1879 la « loi de Stefan » qui sera interprétée par Boltzmann en 1884.

I.B.3.

On utilise la loi de Wien : $\lambda_m T_m = cte$. On trouve ici à l'aide des données sur le soleil : $cte = 3000 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$.

En notant λ_0 la longueur d'onde correspondant au maximum d'émission du filament, on obtient : $\lambda_0 T_0 = 3000 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$ soit

$$\lambda_0 = 1,15 \mu\text{m} \text{ c'est-à-dire dans l'infrarouge.}$$

I.B.4.

Le verre absorbe toute l'énergie correspondant à la partie du spectre $\lambda > 3 \mu\text{m}$

I.B.5.

$$\begin{cases} \phi = \sigma T^4 \\ \phi' = \sigma T_V^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\phi}{\phi'} \geq 10 \text{ donne } \left(\frac{T}{T_V}\right)^4 \geq 10 \text{ soit } T \geq 1,78T_V$$

Application numérique : $T \geq 746K$

I.B.6.

- On multiplie la surface latérale du filament par la puissance surfacique. On obtient la puissance rayonnée par le filament :

$$P_r = 2\pi r L \sigma T^4 \text{ d'où : } T = \sqrt[4]{\frac{P_r}{2\pi r L \sigma}}$$

- On voit que à T et r constants, pour augmenter P_r , il faut augmenter L .

I.B.7.

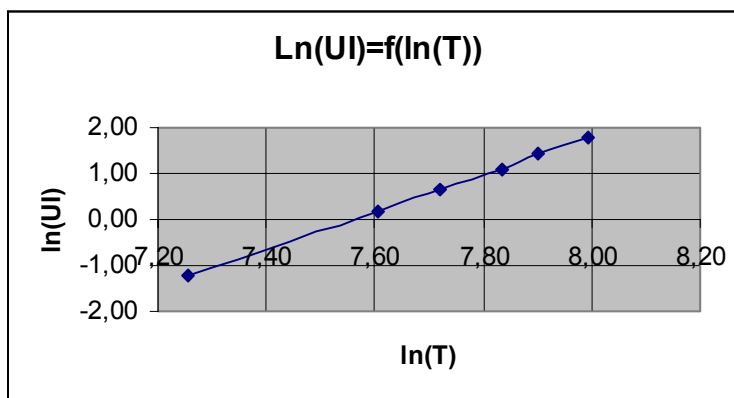
Puisqu'il n'y a pas de phénomène de convection, la puissance électrique consommée par l'ampoule doit intégralement se retrouver sous forme de rayonnement, autrement dit : $UI = P_r = 2\pi r L \sigma T^4$

Donc en traçant $\ln(UI)$ en fonction de $\ln(T)$ on doit obtenir une droite dont la pente sera l'exposant de la loi de Stefan.

C'est ce que l'on vérifie en utilisant les données du tableau I :

U(V)	1,25	3,07	4,2	5,6	6,86	8,65
I(A)	0,237	0,386	0,46	0,539	0,603	0,685
T(K)	1416	2007	2253	2525	2702	2960
ln(UI)	-1,22	0,17	0,66	1,10	1,42	1,78
ln(T)	7,26	7,60	7,72	7,83	7,90	7,99

On trouve bien une droite de pente 4.



I.B.8.

U	1,25	3,07	4,2	5,6	6,86	8,65
I	0,237	0,386	0,46	0,539	0,603	0,685
T	1416	2007	2253	2525	2702	2960
$U \cdot I / T^4$	7,37E-14	7,30E-14	7,50E-14	7,43E-14	7,76E-14	7,72E-14

On a $\left\langle \frac{UI}{T^4} \right\rangle = 2\pi r L \sigma = 7,51 \cdot 10^{-14}$, d'où $\sigma = 9,96 \cdot 10^{-9} W m^{-2} K^{-4}$. On prendra $\sigma_1 = 10^{-8} W \cdot m^{-2} K^{-4}$.

Comparé à la valeur tabulée, on en conclut que le filament rayonne moins d'énergie qu'un corps noir à la même température : il se comporte comme un corps gris, c'est à dire un corps qui rayonne simplement une fraction de ce que rayonne un corps noir à la même température.

I.B.9.

$$UI = P_r = 2\pi r L \sigma_1 T^4 = R(T) I^2, \text{ d'où : } \begin{cases} T = \left(\frac{UI}{2\pi r L \sigma_1}\right)^{1/4} \\ \frac{UI}{I^2} = \frac{U}{I} = R(T) = \rho \frac{L}{\pi r^2} = (aT^2 + bT) \frac{L}{\pi r^2} \end{cases}$$

Il suffit de remplacer T dans la deuxième expression par sa valeur en fonction de UI (1^{ère} expression) pour obtenir la relation

de l'énoncé : $\frac{U}{I} = \alpha(UI)^p + \beta(UI)^q$ avec : $\begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha = a \frac{L}{\pi r^2} \left(\frac{1}{2\pi r L \sigma_1} \right)^{1/2} \\ \beta = b \frac{L}{\pi r^2} \left(\frac{1}{2\pi r L \sigma_1} \right)^{1/4} \end{cases}$

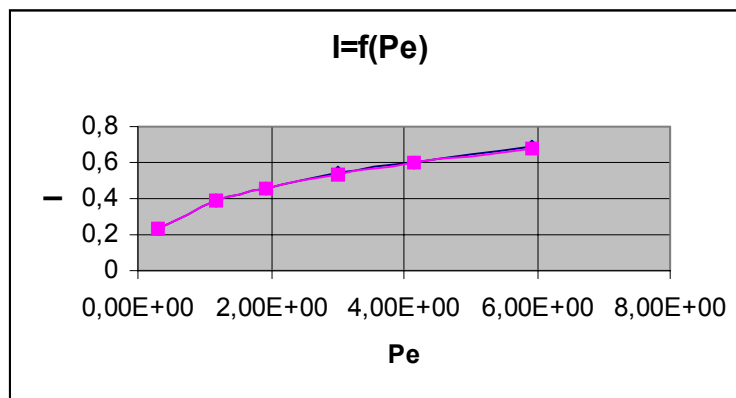
I.B.10.

On a donc : $P_e = UI$ d'où $R = \frac{U}{I} = \alpha P_e^p + \beta P_e^q$

Par ailleurs, $P_e = RI^2$ d'où $I = \sqrt{\frac{P_e}{R}}$. En définitive : $I = \sqrt{\frac{P_e}{\alpha P_e^p + \beta P_e^q}}$

On dresse le tableau suivant :

U (V)	1,25	3,07	4,2	5,6	6,86	8,65
I (expérimental) (A)	0,237	0,386	0,46	0,539	0,603	0,685
U*I (W)	2,96E-01	1,19E+00	1,93E+00	3,02E+00	4,14E+00	5,93E+00
I (théorique) (A)	2,37E-01	3,88E-01	4,60E-01	5,38E-01	6,00E-01	6,80E-01



Les points expérimentaux sont exactement sur la courbe théorique.

I.C- Evolution de la température au voisinage des points de fixation

I.C.1.

La tige métallique a une très bonne conductivité thermique de sorte que l'énergie thermique s'y répartit très rapidement et donc que la température y est pratiquement uniforme. (En vérité le bon paramètre pour cette approche qualitative serait plutôt la diffusivité thermique)

I.C.2.

Ecrivons qu'en régime stationnaire, l'énergie apportée au tronçon de filament de longueur dx est égale à l'énergie partie de ce même tronçon :

$$\pi r^2 j(x) + \rho \frac{dx}{\pi r^2} I^2 = \pi r^2 j(x+dx) + 2\pi r dx \sigma_1 T^4 \quad \text{soit : } -\frac{dj}{dx} dx = \frac{2}{r} \sigma_1 T^4 dx - \frac{\rho}{(\pi r^2)^2} I^2 dx$$

En tenant compte de la loi phénoménologique de Fourier ($j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$), et en simplifiant par dx , on obtient :

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2}{r} \sigma_1 T^4 - \frac{\rho}{(\pi r^2)^2} I^2$$

I.C.3

La température T_0 est la température atteinte lorsque T ne dépend plus de x , de sorte que l'on a : $\frac{2}{r} \sigma_1 T_0^4 = \frac{\rho}{(\pi r^2)^2} I^2$. En

remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient la formulation demandée :

$$+\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2}{r} \sigma_1 T^4 - \frac{2}{r} \sigma T_0^4 = \frac{2}{r} \sigma_1 (T^4 - T_0^4) \text{ soit } +\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2\sigma_1 T_0^3}{r\lambda} (T^4 - T_0^4) = 0$$

On a bien l'équation : $+\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0$ avec $\delta = \sqrt{\frac{r\lambda}{2\sigma_1 T_0^3}}$

Application numérique : $\delta = 2.8.10^{-3} \text{ m}$

I.C.4.

• Multiplions l'équation précédente par $\frac{dT}{dx}$: $\frac{d^2 T}{dx^2} \frac{dT}{dx} = \frac{(T^4 - T_0^4) dT}{\delta^2 T_0^3 dx}$

Qui s'écrit encore : $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right] = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{5} T^5 - T_0^4 T \right]$

On peut intégrer entre $x=0$ où $T = T_V$ et $x=d$ où $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=d} = 0$, on obtient :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}^2 = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left[\left(\frac{1}{5} T_0^5 - T_0^4 T_0 \right) - \left(\frac{1}{5} T_V^5 - T_0^4 T_V \right) \right]$$

Dans le membre de droite, on peut négliger la parenthèse de droite devant celle de gauche ($T_0 \gg T_V$), ce qui donne :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}^2 = -\frac{1}{\delta^2 T_0^3} \frac{4}{5} T_0^5 \text{ soit : } \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}^2 = \frac{8T_0^2}{5\delta^2}$$

On trouve le résultat demandé : $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \gamma \frac{T_0}{\delta}$ avec $\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

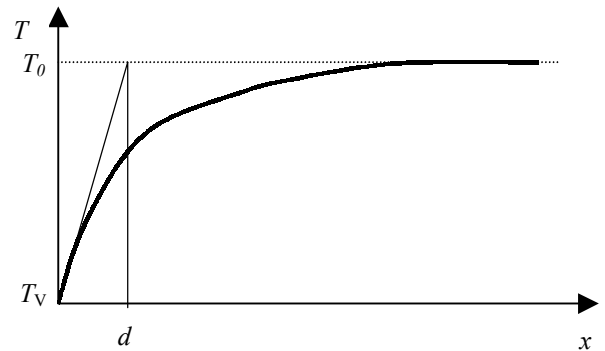
• Application numérique : $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 1,17.10^6 \text{ Km}^{-1}$ et $\delta = 1,26$

- Sur la figure ci contre, on a représenté l'allure de l'évolution de la température avec x . On voit que la tangente à l'origine de la courbe l'asymptote en un point dont l'abscisse donne une bonne idée de la distance caractéristique d sur laquelle le filament monte en température.

L'équation de la tangente est : $T = T_V + x \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}$

En écrivant que cette droite coupe l'asymptote en $x=d$, on obtient : $d \approx \frac{T_0 - T_V}{\gamma T_0} \delta \approx \frac{\delta}{\gamma}$

Application numérique : $d \approx 2 \text{ mm}$



I.C.5.

Le transfert thermique se fait au niveau de la section du filament, en $x=0$, d'où $P_{ther} = \pi r^2 \lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \pi r^2 \lambda \gamma \frac{T_0}{\delta}$

On a déjà explicité la puissance rayonnée : $P_r = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$ (en vérité un peu moins à cause de la diminution de T en bout de filament)

D'où : $\frac{P_{ther}}{P_r} = \frac{\pi r^2 \lambda \gamma \frac{T_0}{\delta}}{2\pi r L \sigma_1 T_0^4}$ avec $\frac{1}{\sigma_1 T_0^3} = \frac{2\delta^2}{r\lambda}$

Il reste : $\frac{P_{ther}}{P_r} = \gamma \frac{\delta}{L}$

Application numérique : $\frac{P_{ther}}{P_r} = 0,09$ soit tout de même presque 10% !

I.C.6.

Si on augmente la puissance à température et rayon de filament constants, on augmente L en laissant δ constant, donc le rapport P_{ther}/P_r diminue.

Partie II : Lampe à incandescence en régime sinusoïdal forcé basse fréquence

II.A- Etude théorique de l'évolution périodique de la température

II.A.1.a.

A pression constante, pour une variation dT de la température du filament, on a $dH = mc_p dT$

II.A.1.b.

- On raisonne pendant dt et on écrit que l'énergie reçue durant cette durée sert d'une part à augmenter l'enthalpie du filament, d'autre part est rayonnée. Il vient donc : $P_e(t)dt = dH + 2\pi r L \sigma_1 T(t)^4 dt$

on obtient en divisant par dt : $P_e(t) = mc_p \frac{dT}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T(t)^4$

- Sachant que $P_e(t) = \frac{u_a(t)^2}{R_0}$, et que $T(t) = T_0 + \theta(t)$ $\frac{u_a^2(t)}{R_0} = mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4$

II.A.2.

Puisque $\langle T(t) \rangle = \langle T_0 + \theta(t) \rangle = T_0 + \langle \theta(t) \rangle = T_0$, on a clairement $\langle \theta(t) \rangle = 0$

Prenons la valeur moyenne temporelle sur une période τ de l'équation différentielle précédente.

Comme $(T_0 + \theta)^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3\theta$, on va avoir : $\langle (T_0 + \theta)^4 \rangle \approx \langle T_0^4 + 4T_0^3\theta \rangle = T_0^4$ d'où :

$$\frac{u_{aRMS}^2}{R_0} = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 \text{ soit : } T_0 = \sqrt[4]{\frac{u_{aRMS}^2}{2\pi r L \sigma_1}} \text{ expression comparable à celle obtenue en I.B.6.}$$

II.A.3.a.

$$P_e(t) = \frac{u_a^2(t)}{R_0} = \frac{2U_a^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)}{R_0}$$

II.A.3.b.

La fonction $t \mapsto P_e(t)$ a la même pulsation que la fonction $t \mapsto \cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)$, c'est-à-dire ω . Comme c'est également la grandeur physique qui excite les oscillations thermiques du filament, il est normal que la réponse du filament soit de pulsation ω .

II.A.3.c.

En se souvenant que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, on peut réécrire l'équation différentielle du II.A.1.b. en tenant compte de l'expression de $u_a^2(t)$:

$$\frac{u_a^2(t)}{R_0} = mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4 \text{ devient :}$$

$$\frac{U_a^2}{R_0} [1 + \cos(\omega t)] = mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4 \approx mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 4 \cdot 2\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta$$

$$\text{qui se simplifie en : } \frac{U_a^2}{R_0} \cos(\omega t) \approx mc_p \frac{d\theta}{dt} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta \text{ puisque } \frac{U_a^2}{R_0} = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$$

On peut dès lors passer en notation complexe : $\frac{U_a^2}{R_0} e^{i\omega t} = mc_p (i\omega)\underline{\theta} e^{i\omega t} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \underline{\theta} e^{i\omega t}$

Soit : $\underline{\theta} = \frac{\frac{U_a^2}{R_0}}{imc_p\omega + 8\pi rL\sigma_1 T_0^3}$ qui se met sous la forme de l'énoncé : $\underline{\theta} = \frac{\theta_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}}$

avec : $\theta_0 = \frac{1}{8\pi rL\sigma_1 T_0^3} \frac{U_a^2}{R_0} = \frac{T_0}{4}$ et $\omega_C = \frac{8\pi rL\sigma_1 T_0^3}{mc_p}$

Remarque : il est intéressant à ce niveau de vérifier l'unité de ω_C . En S.I., on obtient : $[\omega_C] = \frac{m^2 Js^{-1} m^{-2} K^{-4} K^3}{kg JK^{-1} kg^{-1}} = s^{-1}$

II.A.3.d.

- On voit que le filtre est un filtre passe-bas : si les oscillations excitatrices sont très rapides, elles n'ont pas le temps de se répercuter en oscillations de la température, et la température du filament devient quasiment constante.

- En faisant intervenir la masse volumique μ du tungstène, on obtient : $\omega_C = \frac{8\sigma_1 T_0^3}{\mu r c_p}$

On constate effectivement que ω_C est indépendante de la longueur du filament.

- On a $\theta_m = \theta_0$ et l'inéquation $\theta_m < \frac{T_0}{10}$ donne : $\left| \frac{\frac{T_0}{4}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}} \right| < \frac{T_0}{10}$, soit : $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} < \frac{2}{5}$ et $\omega > \frac{\sqrt{21}}{2} \omega_C \approx 2,3 \omega_C$

II.A.3.e.

Application numérique : $\nu_C = 2,45 \text{ Hz}$ (attention à l'unité de c_p !)

II.B- Modulation de l'intensité lumineuse par largeur d'impulsion

II.B.1.

On a vu que au II.A.2. que l'intensité lumineuse rayonnée était directement reliée à la valeur efficace de $u_a(t)$, c'est à dire à la moyenne temporelle de $u_a^2(t)$. La valeur de α va conditionner cette moyenne temporelle, donc la valeur de l'intensité lumineuse émise.

II.B.2.

$$a_0 = \langle u_a(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} u_a(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\alpha \frac{\tau}{2}}^{+\alpha \frac{\tau}{2}} U dt = \frac{1}{\tau} U \frac{2\alpha\tau}{2}, \text{ soit : } a_0 = \alpha U$$

Puisque la fonction dont on cherche la décomposition est paire, la partie impaire de son développement doit être nulle :

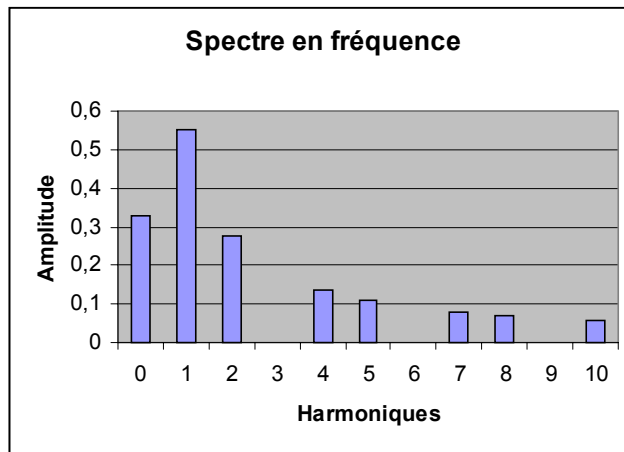
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$$

$$\text{Pour } n > 0, a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} u_a(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\alpha \frac{\tau}{2}}^{+\alpha \frac{\tau}{2}} U \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\tau} U \frac{1}{n\omega} [\sin(n\omega t)]_{-\frac{\alpha\tau}{2}}^{+\frac{\alpha\tau}{2}} = \frac{4U}{n\omega\tau} \sin\left(n\alpha\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

Soit avec $\omega\tau = 2\pi$: $a_n = \frac{2U}{n\pi} \sin(n\alpha\pi)$

Spectre en fréquence : on porte $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n|$ en fonction de n . Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, on obtient le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n / U	0,33	0,55	0,28	0,00	0,14	0,11	0,00	0,08	0,07	0,00	0,06



On remarquera que les harmoniques multiple de 3 sont nulles.

II.B.3.

D'après la définition de u_a , on va avoir : $P_e(t) = \frac{u_a^2(t)}{R_0} = \begin{cases} \frac{U^2}{R_0} & \text{pour } |t| < \frac{\alpha\tau}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{\alpha\tau}{2} < |t| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$.

La décomposition de $P_e(t)$ est donc identique à celle de $u_a(t)$: il suffit de remplacer U par $\frac{U^2}{R_0}$

On obtient ainsi : $P_0 = \frac{\alpha U^2}{R_0}$ et $P_n = \frac{2}{n\pi} \frac{U^2}{R_0} \sin(n\alpha\pi) = 2P_0 \text{sinc}(n\pi\alpha)$

II.B.4.

Reprenons l'équation différentielle obtenue en II.A.3.c.

$$\frac{u_a^2(t)}{R_0} = mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4$$

qui devient :

$$P_e(t) = mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4 \approx mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 4 \cdot 2\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta$$

puis :

$$P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t) \approx mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 4 \cdot 2\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta$$

qui se simplifie en :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t) \approx mc_p \frac{d\theta}{dt} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta \quad \text{puisque } P_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$$

On peut dès lors passer en notation complexe :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n e^{in\omega t} = mc_p \sum_{n=1}^{+\infty} (in\omega) \underline{\theta}_n e^{in\omega t} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{\theta}_n e^{in\omega t}$$

En multipliant chacun des deux membres par $e^{-iq\omega t}$ et en prenant la moyenne temporelle, il est facile d'en déduire :

$$\forall n \geq 1, \quad P_n = mc_p in\omega \underline{\theta}_n + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \underline{\theta}_n$$

$$\text{soit : } \underline{\theta}_n = \frac{P_n}{mc_p in\omega + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3} = \frac{\frac{P_n}{8\pi r L \sigma_1 T_0^3}}{1 + in \frac{\omega}{\omega_C}} \quad \text{en se rappelant que : } P_n = \frac{2}{n\pi\alpha} P_0 \sin(n\alpha\pi) = \frac{2 \sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$$

$$\text{et en définitive : } \underline{\theta}_n = \frac{T_0}{2} \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \frac{1}{1 + in \frac{\omega}{\omega_C}}$$

Dans le cas où $\omega \gg \omega_C$, l'expression précédente se simplifie en : $\theta_n = \frac{T_0 \sin(n\pi\alpha)}{2 n\pi\alpha} \frac{\omega_C}{i n \omega}$

II.B.5.

En ce qui concerne la fonction $\theta(t)$, l'égalité de Parseval (démontrée en annexe) s'écrit :

$$\theta_{RMS}^2 = \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \quad \text{avec} \quad c_n^2 = |\theta_n|^2$$

$$\text{D'où : } \theta_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T_0}{2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_C}\right)^2}} \quad \text{et donc} \quad \delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$

Dans le cas où $\omega \gg \omega_C$, les expressions précédentes se simplifient en :

$$\theta_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T_0}{2} \frac{\omega_C}{\omega} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{n^2}} \quad \text{et} \quad \delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_C}{\omega} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{n^2}}$$

Cette dernière expression montre que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_0 = 0$. Autrement dit, on peut moduler l'intensité lumineuse (à l'aide de α) sans que l'on observe des oscillations temporelles, à condition d'utiliser une fréquence suffisante.

II.- Vérification expérimentale

II.C.1.a.

Le plan sensible de la photodiode doit être placé normalement à la direction de propagation de l'énergie lumineuse.

II.C.1.b.

La puissance électrique absorbée par l'ampoule est intégralement rayonnée par le filament. A une distance D , cette puissance se trouve répartie sur une sphère de surface $4\pi D^2$.

La puissance qui arrive au niveau de la photodiode de surface S est donc : $P_i = P_e \frac{S}{4\pi D^2}$

II.C.1.c.

La puissance P_i qui arrive sur la photodiode est répartie sur tout le spectre électromagnétique selon la formule de Planck. Si toute la puissance incidente était absorbée par le capteur, on retrouverait la loi de Stefan et on aurait u_s proportionnelle à T^4 . Or seule la partie comprise entre $0,45\mu\text{m}$ et $1,1\mu\text{m}$ est absorbée par la photodiode. On perd donc la dépendance en T^4 .

u_s doit dans ces conditions être proportionnelle à $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dP_i}{d\lambda}(T, \lambda) d\lambda$ qui selon l'énoncé doit être proportionnel à $T^{7,5}$.

II.C.1.d.

On peut tout d'abord remarquer que :

- u_s est de fréquence double de u_a
- u_s est déphasée par rapport à u_a

On sait que la réponse du capteur est $u_s(t) = KT^{7,5}$ avec $T(t) = T_0 + \theta(t)$. Sachant que l'on a encore $\theta(t) \ll T_0$, on obtient en développant : $u_s(t) = KT_0^{7,5} + 7,5KT_0^{6,5}\theta(t)$

On voit donc que $K = \frac{\langle u_s \rangle}{T_0^{7,5}}$, puis en notant $u_{s\sim}(t)$ la composante alternative de u_s :

$$u_{s\sim\text{eff}} = 7,5KT_0^{6,5}\theta_{\text{eff}} = 7,5 \frac{\langle u_s \rangle}{T_0^{7,5}} T_0^{6,5} \theta_{\text{eff}} = 7,5 \frac{\langle u_s \rangle}{T_0} \theta_{\text{eff}}$$

On obtient ainsi : $\theta_{\text{eff}} = \frac{1}{7,5} \frac{u_{s\sim\text{eff}}}{\langle u_s \rangle} T_0$ d'où on tire : $\theta_m = \sqrt{2} \theta_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{7,5} \frac{u_{s\sim\text{eff}}}{\langle u_s \rangle} T_0$

Application numérique : $\theta_m = 0,022T_0 = 58 \text{ K}$

Les résultats du II.A.3. donnaient : $\theta_m = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} T_0$ soit en prenant $\frac{\omega}{\omega_C} = \frac{20}{2,45} = 8,16$: $\theta_m = 0,03T_0 = 79 \text{ K}$.

II.C.2.

On a vu que $u_{s\sim eff} = 7,5KT_0^{6,5}\theta_{eff} = \frac{7,5}{\sqrt{2}}KT_0^{6,5}\theta_m = \frac{7,5}{\sqrt{2}}KT_0^{6,5} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} T_0$

Expression qui se simplifie dans la mesure où $\omega \gg \omega_C$: $u_{s\sim eff} \approx \frac{7,5}{4\sqrt{2}}KT_0^{7,5} \frac{\omega_C}{\omega} = \frac{7,5}{4\sqrt{2}}KT_0^{7,5} \frac{v_C}{v}$ avec $\omega_C = \frac{8\sigma_1 T_0^3}{\mu r c_p}$

En définitive : $u_{s\sim eff} = cte \frac{T_0^{10,5}}{f}$ et donc : $\ln(u_{s\sim eff}) = \ln(cte) + 10,5\ln(T_0) - \ln(f)$

On vérifie expérimentalement la pente -1 de la courbe $\ln(u_{s\sim eff})$ en fonction de $\ln(f)$

II.C.3.

On voit sur l'expression de $\ln(u_{s\sim eff})$ en fonction de $\ln(f)$ que l'ordonnée à l'origine de ces droites est reliée à la température du filament.

A l'aide de l'expression trouvée, on obtient le décalage des ordonnées à l'origine pour les deux tensions :

$$\Delta(\ln(u_{seff})_0) = 10,5 \ln\left(\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}}\right)$$

Partie III : Détermination expérimentale du rapport hc/k_B

Association photodiode-filtre interférentiel

III.A.

L'onde n°2 traverse une épaisseur $2e$ supplémentaire d'un milieu d'indice n . On a donc $\psi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne$

III.B.

On va avoir interférences constructives lorsque $\psi = m2\pi$, soit encore $\lambda = \frac{2ne}{m}$

III.C.

Les longueurs d'onde qui passent à travers le filtre sont données par : $\lambda_m = \frac{2ne}{m}$

Par ailleurs, la photodiode n'absorbe que les longueurs d'onde comprises entre 450 et 1100 nm

On cherche donc une épaisseur e telle que :

♥ $\lambda_0 = 510$ nm soit une longueur d'onde passant à travers le filtre (il existe m_0 tel que $\lambda_{m_0} = \frac{2ne}{m_0}$)

♥ $\forall m \neq m_0, \lambda_m$ ne soit pas dans l'intervalle [450 nm ; 1100 nm]

Il est facile de vérifier que le couple $m_0=1$ et $e=163$ nm réalise cette double condition, et que c'est le seul.

III.D.

Ecrivons u_s à l'aide de la formule de Planck

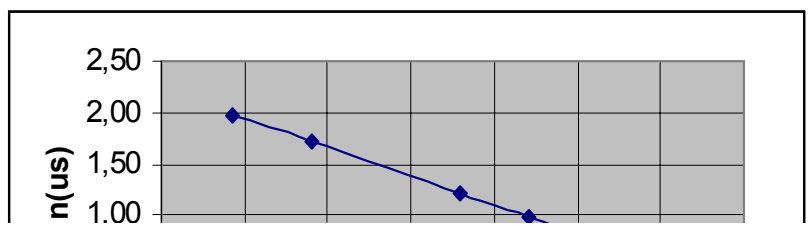
$$u_s = K' \frac{d\varphi_e}{d\lambda} \Delta\lambda = K'' \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1}$$

On est dans un domaine de température tel que $e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} \gg 1$, donc on peut simplifier l'écriture précédente sous la forme :

$$u_s = K''' e^{-\frac{hc}{k_B \lambda T}} \quad \text{soit } \ln(u_s) = cte - \frac{hc}{k_B} \frac{1}{T}$$

On trace donc $\ln(u_s)$ en fonction de $\frac{1}{T}$

C:\Mes documents\CORUPS\reçu 2000c\c00p089.



u_s	7,21	5,53	3,4	2,68	1,6
$\ln(u_s)$	1,98	1,71	1,22	0,99	0,47
T	2510	2450	2348	2303	2210
$1/T \cdot 10^4$	3,984	4,082	4,259	4,342	4,525

Une régression linéaire donne une pente de $2,78 \cdot 10^4$

Soit $\frac{hc}{k_B \lambda} = 2,78 \cdot 10^4 \text{ K}$, d'où on tire :

$$\boxed{\frac{hc}{k_B} = 1,44(6) \cdot 10^{-2} \text{ Km}}$$

en accord avec la valeur théorique.

●●● FIN ●●●

Annexe : égalité de Parseval

Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{C} périodique de période T_1 , on sait que :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

ou bien encore en utilisant la notation complexe (ici différente de celle utilisée dans l'énoncé) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{in\omega_1 t} \quad \text{où on a} \quad \underline{C}_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt$$

Remarques: ① La formule donnant \underline{C}_n est également valable pour $\underline{C}_0 = a_0/2$

② On passe facilement de la notation complexe à la notation réelle en remarquant que :

$$\begin{cases} \underline{C}_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ \underline{C}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_n = (\underline{C}_n + \underline{C}_{-n}) \\ b_n = i(\underline{C}_n - \underline{C}_{-n}) \end{cases}$$

③ Si $f(t)$ est à valeurs réelles, alors $\underline{C}_{-n} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{+in\omega_1 t} dt = \overline{\underline{C}_n}$, de sorte que a_n et b_n sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = 2 \operatorname{Re}(\underline{C}_n) \\ b_n = -2 \operatorname{Im}(\underline{C}_n) \end{cases}$$

④ Si $f(t)$ est à valeur réelle, l'amplitude de l'harmonique de rang n est : $c_n = 2|\underline{C}_n|$

Considérons maintenant un phénomène physique périodique décrit par $f(t)$. L'énergie moyenne associée à ce phénomène fait intervenir le carré de f . L'énergie moyenne sur une période est donc proportionnelle à : $\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f^2(t) dt$.

L'égalité de Parseval exprime que cette énergie est répartie sur toutes les harmoniques du phénomène :

$$\boxed{\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f^2(t) dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2}$$

où c_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n : $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Montrons cette propriété en évaluant dans le cas général où f est à valeurs dans \mathbb{C} l'intégrale: $\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \overline{f(t)} dt$

$$\begin{aligned} \text{Comme } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{in\omega_1 t}, \text{ on obtient : } & \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{in\omega_1 t} \right) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \int_{T_1} \overline{f(t)} e^{in\omega_1 t} dt \\ & = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \overline{\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \overline{\underline{C}_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\underline{C}_n|^2 \end{aligned}$$

Si f est à valeurs dans \mathbb{R} , alors $|\underline{C}_n| = |\underline{C}_{-n}|$ et on obtient l'égalité de Parseval en rassemblant la sommation sur les indices négatifs et celle sur les indices positifs :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \overline{f(t)} dt &= |\underline{C}_0|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |\underline{C}_n|^2 + \sum_{n=+1}^{+\infty} |\underline{C}_n|^2 \\ &= |\underline{C}_0|^2 + 2 \sum_{n=+1}^{+\infty} |\underline{C}_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=+1}^{+\infty} c_n^2 \end{aligned}$$

Remarque: l'égalité de Parseval est plus belle en utilisant la forme complexe de la décomposition :

$$\frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) \overline{f(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\underline{C}_n|^2$$