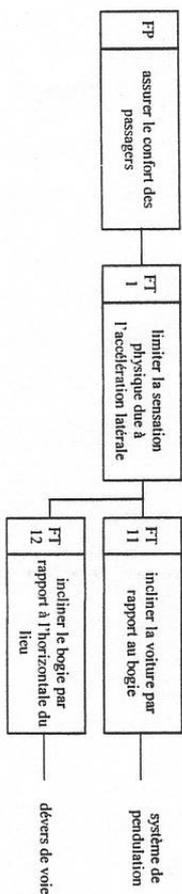


TRAIN PENDULAIRE



R1.

R2.  $\vec{OM} = R \vec{y}_1 \Rightarrow \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_0} = -R \dot{\psi} \vec{x}_1$  comme  $\vec{V}(M/R_0) = -V_M \vec{x}_1$  alors  $V_M = R \dot{\psi}$

$\vec{a}(M/R_0) = \left( \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt} \right)_{R_0} = -V_M \left( \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = -V_M \dot{\psi} \vec{y}_1$  comme  $\dot{\psi} = \frac{V_M}{R}$

$\vec{a}(M/R_0) = -\frac{V_M^2}{R} \vec{y}_1$

R3.  $A_L = (\vec{g} - \vec{a}(M/R_0)) \cdot \vec{y}_C = \left( -g \vec{z}_0 + \frac{V_M^2}{R} \vec{y}_1 \right) \cdot \vec{y}_C = -g \sin \alpha + \frac{V_M^2}{R} \cos \alpha$

si  $A_L = 0$  alors

$\tan \alpha = \frac{V_M^2}{Rg}$

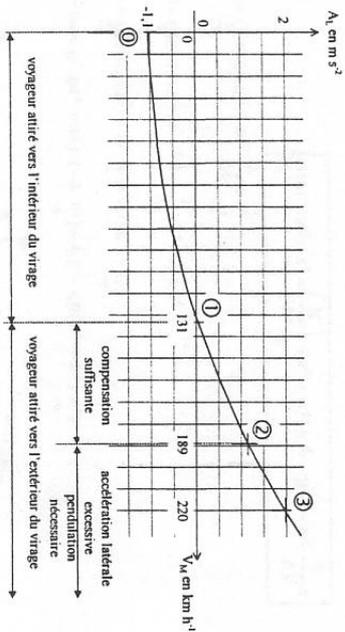
R4.

$\alpha = 17,2^\circ = 0,3 \text{ rad}$

$A_L = -g \alpha + \frac{V_M^2}{R}$

R6.

$A_{L0}(V_{M0}=0) = \dots -1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \dots$   
 $V_{M1} = \dots 131 \text{ km h}^{-1} = 36,3 \text{ m s}^{-1} \dots$   
 $V_{M2} = \dots 189 \text{ km h}^{-1} = 52,5 \text{ m s}^{-1} \dots$   
 $A_{L3}(V_{M3}=220 \text{ km/h}) = \dots 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \dots$



Conclusion : à 220 km/h la pendulation est nécessaire

R7. Bilan des actions mécaniques exercées sur le passager.

- pesanteur
- action du siège

Théorème de la résultante dynamique appliqué au passager en mouvement par rapport à  $R_0$  galiléen :

$m \vec{g} + \vec{R}(\text{siège} \rightarrow \text{passager}) = m \vec{a}(M/R_0)$

$\vec{R}(\text{siège} \rightarrow \text{passager}) \cdot \vec{y}_C = -m \left( \vec{g} - \vec{a}(M/R_0) \right) \cdot \vec{y}_C$   
 $A_L$

Avec cette équation, on remarque clairement que lorsque  $A_L$  est positif le siège retient le passager.

R8.  $A_L = -g(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{V_M^2}{R} \leq 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$\alpha_2 \geq \frac{1}{g} \left( \frac{V_M^2}{R} - 1,2 \right) - \alpha_3$   
 $\alpha_2 \geq 0,08 \text{ rad}, \alpha_2 \geq 4,65^\circ$

R9.  $\vec{OO}_2 = R \vec{y}_1 \Rightarrow \left( \frac{d\vec{OO}_2}{dt} \right)_{R_0} = -R \dot{\psi} \vec{x}_1$  comme  $\vec{V}(O_2/R_0) = -V_2 \vec{x}_1$  alors  $V_2 = R \dot{\psi}$

$V_2 = R \dot{\psi}$

R10. 1<sup>re</sup> méthode

Calcul du moment cinétique en G :  $\vec{\sigma}(G,(C)/R_0) = \mathbb{I}(G,(C)) \cdot \vec{\Omega}(C)/R_0$   
 puis calcul du moment dynamique en G :  $\vec{\delta}(G,(C)/R_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}(G,(C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0}$

enfin calcul du moment dynamique en I :  $\vec{\delta}_I((C)/R_0) = \vec{\delta}(G,(C)/R_0) + m_c \vec{a}(G,(C)/R_0) \wedge \vec{GI}$

2<sup>ème</sup> méthode

Calcul du moment cinétique en G :  $\vec{\sigma}(G,(C)/R_0) = \mathbb{I}(G,(C)) \cdot \vec{\Omega}(C)/R_0$   
 Calcul du moment cinétique en I :  $\vec{\sigma}_I(G,(C)/R_0) + m_c \vec{V}(G,(C)/R_0) \wedge \vec{GI}$

enfin calcul du moment dynamique en I :  $\vec{\delta}_I((C)/R_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}_I((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} + m_c \left( \frac{d\vec{OI}}{dt} \right)_{R_0} \wedge \vec{V}(G,(C)/R_0)$

R11.  $\vec{V}(O_2/R_0) = -R \dot{\psi} \vec{x}_1$  et  $\vec{V}(G,(C)/R_0) = -(\vec{OO}_2 \cdot \vec{y}_1 + O_2 G \cdot \vec{y}_1) \dot{\psi} \vec{x}_1$

$\vec{OO}_2 \cdot \vec{y}_1 = R = 1200 \text{ m}$  bien évidemment  $|\vec{O}_2 G \cdot \vec{y}_1| \ll R$

donc  $\vec{V}(G,(C)/R_0) = \vec{V}(O_2/R_0) = -R \dot{\psi} \vec{x}_1$

R12. 1<sup>re</sup> méthode

$\vec{\Omega}(C)/R_0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$   
 $\vec{\Omega}(C)/R_0 = \dot{\psi} \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \vec{y}_C + \dot{\psi} \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \vec{z}_C$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}((C)/R_0) &= \psi(\alpha_v + \alpha_3) \vec{y}_c + \psi \vec{z}_c \\ \vec{\sigma}((C)/R_0) &= \psi B_C(\alpha_v + \alpha_3) \vec{y}_c + \psi C_C \vec{z}_c \\ \left( \frac{d\vec{y}_c}{dt} \right)_{R_0} &= \psi \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_c = -\psi \vec{x}_1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{d\vec{z}_c}{dt} \right)_{R_0} = \psi \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_c = \psi(\alpha_v + \alpha_3) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}((C)/R_0) &= \psi B_C(\alpha_v + \alpha_3) \cdot (-\psi \vec{x}_1) + \psi C_C \cdot (\psi(\alpha_v + \alpha_3) \vec{x}_1) \\ \vec{\delta}((C)/R_0) &= \vec{\delta}((C)/R_0) + m_c \vec{a} \wedge \vec{G}((C)/R_0) \wedge \vec{G} \\ \vec{\delta}((C)/R_0) &= \vec{\delta}((C)/R_0) + m_c \left( -\frac{V_2^2}{R} \vec{y}_1 \right) \wedge \left( a \vec{z}_c \right) \\ \vec{\delta}((C)/R_0) &= \vec{\delta}((C)/R_0) - m_c \frac{V_2^2}{R} a \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}((C)/R_0) \cdot \vec{x}_1 = \left( \frac{V_2^2}{R} \right)^2 (\alpha_v + \alpha_3) (C_C - B_C) - m_c \frac{V_2^2}{R} a$$

2<sup>ème</sup> méthode

$$\vec{\sigma}((G, (C))/R_0) = \psi B_C(\alpha_v + \alpha_3) \vec{y}_c + \psi C_C \vec{z}_c$$

$$\vec{\delta}((C)/R_0) = \vec{\sigma}((G, (C))/R_0) + m_c \vec{V}((G, (C))/R_0) \wedge \vec{G}$$

$$\vec{\sigma}((C)/R_0) = \vec{\sigma}((G, (C))/R_0) + m_c (-R\psi \vec{x}_1) \wedge a \vec{z}_c = \vec{\sigma}((G, (C))/R_0) + m_c a R \psi \vec{y}_c$$

$$\vec{\delta}((C)/R_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} + m_c \left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} \wedge \vec{V}((G, (C))/R_0)$$

puisque  $\left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} // \vec{V}((G, (C))/R_0) // \vec{x}_1$  alors  $\left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} \wedge \vec{V}((G, (C))/R_0) = 0$  donc  $\vec{\delta}((C)/R_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0}$

$$\vec{\delta}((C)/R_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}((C)/R_0)}{dt} \right)_{R_0} + m_c a R \psi \left( \frac{d\vec{y}_c}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\vec{\delta}((C)/R_0) \cdot \vec{x}_1 = \left( \frac{V_2^2}{R} \right)^2 (\alpha_v + \alpha_3) (C_C - B_C) - m_c \frac{V_2^2}{R} a$$

R13.  $\left( M_1(\text{pesanteur} \rightarrow (C)) + M_1(S \rightarrow C) \right) \cdot \vec{x}_1 = \vec{\delta}((C)/R_0) \cdot \vec{x}_1$

$$\left( (-m_c g z_0) \wedge \vec{G} + M_1(S \rightarrow C) \right) \cdot \vec{x}_1 = \dots$$

$$-m_c g a (\alpha_v + \alpha_3) - 2 d_b^2 K_{2b} \alpha_3 = \left( \frac{V_2^2}{R} \right)^2 (\alpha_v + \alpha_3) (C_C - B_C) - m_c \frac{V_2^2}{R} a$$

R14.  $a m_c \left( \frac{V_2^2}{R} - g (\alpha_v + \alpha_3) \right) = +2 d_b^2 K_{2b} \alpha_3 + \left( \frac{V_2^2}{R} \right)^2 (\alpha_v + \alpha_3) 0,6 m_c$

$$a = \frac{2 d_b^2 K_{2b} \alpha_3 + \left( \frac{V_2^2}{R} \right)^2 (\alpha_v + \alpha_3) 0,6 m_c}{m_c \left( \frac{V_2^2}{R} - g (\alpha_v + \alpha_3) \right)}$$

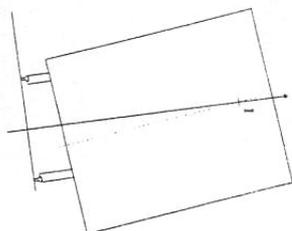
$$a (3,11 m_c - 1,97 m_c) = +2 d_b^2 K_{2b} \alpha_3 + 3 \cdot 10^{-4} m_c$$

$$a (155500 - 98500) \cdot 1,14 = 62831,85 \text{ Nm} + 15,34 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Les 156 000 N utilisés dans l'étude statique. L'étude rapide de cette relation montre que dans le cas où  $\alpha_3$  est constant, on peut assimiler le wagon à un point matériel G de masse 50 000 kg.

$$a = 1,1 \text{ m}$$

R15. La figure ci-contre montre bien le problème d'encombrement lié à cette solution.



L'axe de rotation placé plus près du centre de la voiture, associé à des profils de caisses « ronds », permet une pendulation à encombrement réduit. L'axe de rotation est placé à hauteur des sièges, limitant ainsi les effets, sur le voyageur du mouvement dû à la pendulation.

R16.



R22. Isolons (C) en équilibre dans R<sub>1</sub>.

Bilan des actions extérieures à (C) :

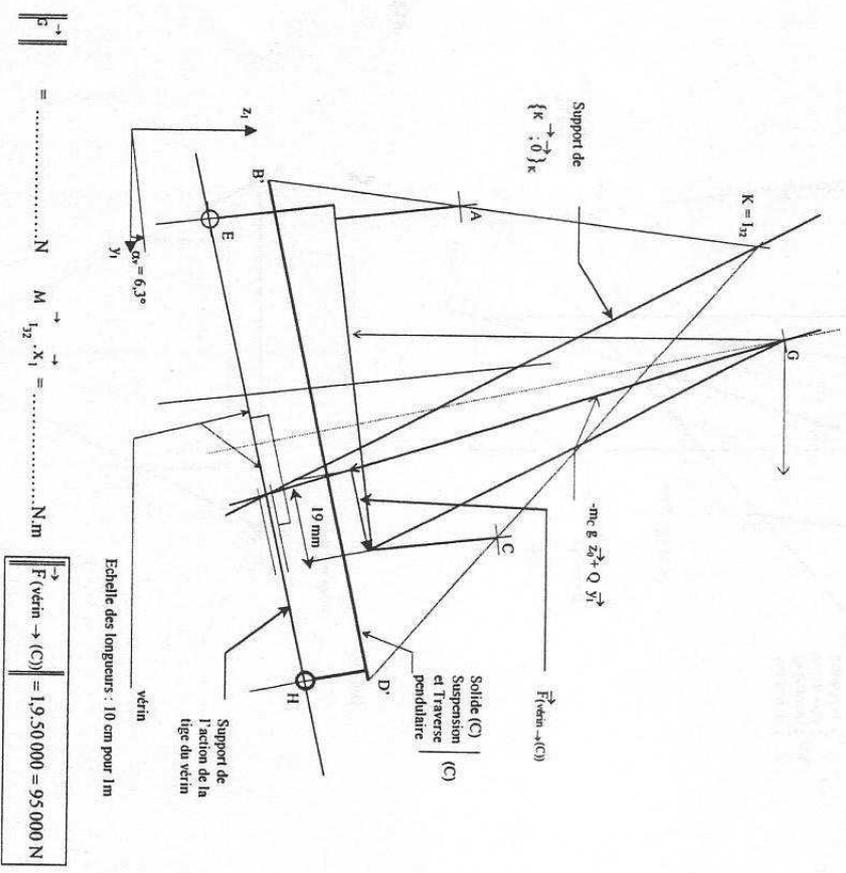
- $\{F_v\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}(\text{vérim} \rightarrow (C)); 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_H$  l'action de la tige du vérim sur la traverse pendulaire qui est un glisseur de support EH :
- $\{f_c\} = \left\{ \begin{matrix} -m_C g \vec{z}_0 + Q \vec{y}_1; 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$  connu
- $\{k\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{K} \\ 0 \end{matrix} \right\}_K$  qui est un glisseur passant par K

Principe fondamental de la dynamique appliqué à (C) immobile dans R<sub>1</sub> (R<sub>1</sub> n'est pas galiléen):

$$\{F_v\} + \{f_c\} + \{k\} = \{0\}$$

Le théorème du moment implique que ces trois glisseurs ont des supports concourants.

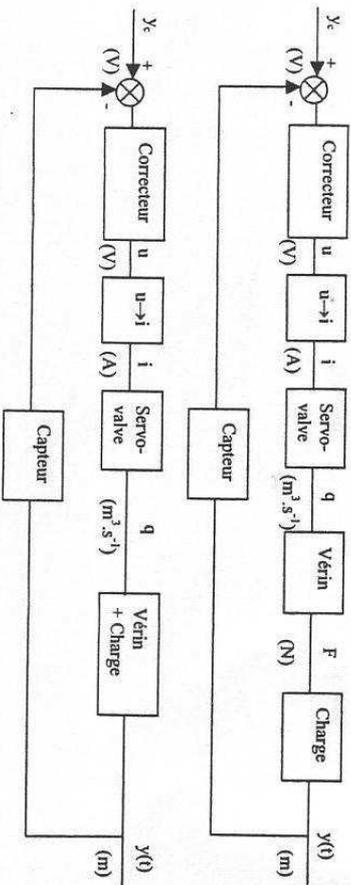
Théorème de la résultante :  $\vec{F}(\text{vérim} \rightarrow (C)) + (-m_C g \vec{z}_0 + Q \vec{y}_1) + \vec{K} = \vec{0}$ .



Echelle des longueurs : 10 cm pour 1m

$\vec{F}(\text{vérim} \rightarrow (C)) = 1,9.50.000 = 95.000 \text{ N}$
---

R23. Plusieurs réponses possibles :



R24. Après transformation de Laplace, il vient :

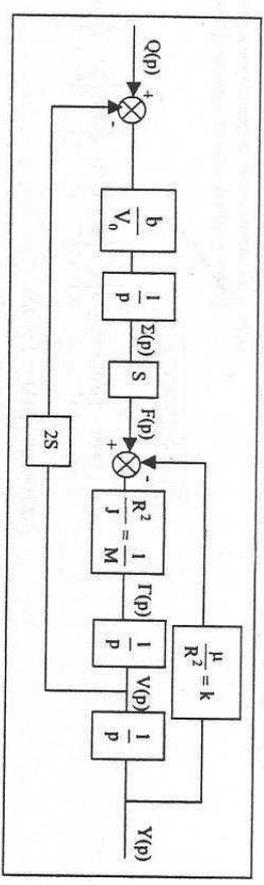
$$Q = 2SpY + \frac{V_0}{V_0} pZ$$

$$Jp^2 \alpha_2 = FR - \mu \alpha_2 \Leftrightarrow Jp^2 \frac{Y}{R} = FR - \mu \frac{Y}{R}$$

$$F = ZS$$

$$pZ = \frac{b}{V_0} (Q - 2SpY)$$

$$p^2 Y = \frac{R^2}{J} - \mu \frac{Y}{J} = \frac{R^2}{J} \left( F - \frac{\mu}{R^2} Y \right) = \frac{1}{M} (F - KY)$$

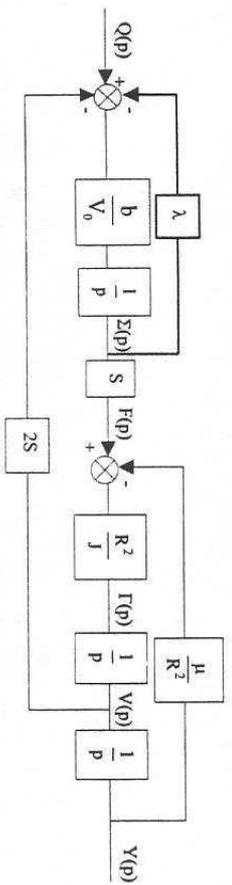


R25. Détermination de la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)}$ .

$$H_1(p) = \frac{bS}{2bS^2 + V_0 k} \left( 1 + \frac{V_0 M}{2bS^2 + V_0 k} p^2 \right)$$

Système instable (oscillateur pur et intégrateur)

R26. Solution du débr de faire. Indiquer la modification à apporter au schéma bloc demandé à la question 24.



R27. Déterminer la nouvelle fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)}$ .

$$H_2(p) = \frac{bs}{b\lambda k + (kV_0 + 2bS^2)p + b\lambda Mp^2 + V_0Mp^3} = \frac{ks}{kV_0 + 2bS^2p + \frac{M}{k}p^2 + \frac{V_0M}{b\lambda k}p^3}$$

Etude de la stabilité par le critère de Routh.

- $V_0M$   $kV_0 + 2bS^2$
- $b\lambda M$   $b\lambda k$
- $2bS^2$   $0$
- $b\lambda k$

Les pivots sont positifs, le système est stable, mais cette solution altère le rendement.

R28. Déterminer la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$ .

$$H_3(p) = \frac{\frac{\delta y/AG}{1 + \delta y/AG}}{1 + \frac{\delta y/AG \tau}{1 + \delta y/AG} p + \frac{p^2}{\beta^2 (1 + \delta y/AG \tau^2)}}$$

Etude de la stabilité par le critère de Routh.  $b_1 > 0$  et  $b_0 > 0$

$(1 + \delta y/AG \tau) > 0$  et  $\gamma \tau > 0$   
on relie la solution  $\gamma$  et  $\tau > 0$

AN :  $H_3(p) = \frac{0,094\gamma}{1 + 0,94\gamma p + \frac{p^2}{1 + 0,94\gamma \tau (1 + 0,94\gamma \tau^2)}}$

1. l'abaque de dépassement donne  $\xi = 0,6$  et l'abaque du temps d'établissement donne  $\omega_n \tau = 5,2$ .  
Il vient  $\omega_n = 305,9 \text{ rad.s}^{-1}$

En identifiant avec la forme canonique du polynôme caractéristique, on trouve :

$$\gamma = 15,7 \text{ et } \tau = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

En lisant la nouvelle courbe de phase pour  $\phi = -180^\circ + M_p = -120^\circ$  on détermine la valeur  $\omega = 10^2 \text{ rd.s}^{-1}$  correspondante. Le gain de  $H_2$  est alors de  $-20,8 \text{ dB}$ .  
Le terme intégrateur introduit un gain de  $-40 \text{ dB}$  pour  $\omega = 10^2 \text{ rd.s}^{-1}$ .  
Le gain du capteur de position étant de  $20 \log 50 = 34$ , le gain  $v$  du correcteur est déterminé par  $20 \log v = 20,8 + 40 - 34 = 26,8 \text{ dB}$ .

$$v = 21,9$$

Il y a un intégrateur dans la FTBO donc

l'erreur en régime permanent en réponse à une consigne en échelon est nulle.

