MATHÉMATIQUES I

Définitions et notations

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|$ (on rappelle que $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$) et munit E d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ (\Phi_m|\Phi_n) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit Φ une suite orthonormale de E.

1) Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$, par $\prod_\Phi^n$ l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ à V_Φ^n.

2) On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n

$$V_\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\Phi^n\ ;$$

par définition V_Φ est égal à l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \Phi_{j_i}$, où $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sont des entiers distincts et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des coefficients réels.

3) On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ convergeant vers f.

Filière PSI

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad ; \qquad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x)$$

et on note $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La partie IV est largement indépendante des trois parties précédentes.

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I.A - Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E.

I.B - Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I.B.1) Établir la formule $\|f\|^2 = \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|^2 + [d_\Phi^n(f)]^2$.

I.B.2) Calculer

$$\sup_{\|f\| = 1} \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|$$

I.B.3) Expliciter $\prod_\Phi^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j | 0 \le j \le n\}$.

En déduire que la série de terme général $(f|\Phi_k)^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f|\Phi_k)^2 \le \|f\|^2$$

I.C - On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E.

I.C.1) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_Φ, convergeant dans E et soit $f = \lim_{k \to \infty} (f_k)$.

a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \ge N \Rightarrow \left\{ f - \prod_\Phi^n(f) = f - f_k + \prod_\Phi^n(f_k - f) \right\}$$

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Φ est totale dans E.

ii) $\forall f \in E$, $\lim_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.3) **On suppose de plus dans cette question seulement** que Φ est totale dans E.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $\|f\|^2$ et $[d_{\Phi}^{n}(f)]^2$ à l'aide des $(f|\Phi_k)$.

I.D - Étude de la suite C.

I.D.1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée $\tilde{f}$ telle que sa restriction à $[0,1]$ soit égale à f.

I.D.2) Montrer alors que la suite C définie dans le préambule est totale dans E. On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par $h(x) = \tilde{f}\left(\frac{x}{\pi}\right)$, la fonction $\tilde{f}$ étant celle de la question précédente.

I.D.3) Exhiber une suite orthonormale de E non totale dans E.

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie dans I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans I si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \quad (\forall (x,y) \in I^2), \quad |f(x) - f(y) \leq C|x-y|$$

On notera $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans I.

II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) Vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbb{R})$.

Le produit de deux éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$?

si $f \in \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup\left\{ \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \quad | \quad (x,y) \in I^2, \, x \neq y \right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

II.A.2) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(I,\mathbb{R})$. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

II.B - Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

Montrer que f' est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.

Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de f'.

II.C - Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n) | n\in\mathbb{N}\}$ est borné.

Montrer que $f\in\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

II.D - Soit $g\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $k(g)\le 1$.

II.D.1) Montrer qu'il existe $\widehat{g}\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$k(\widehat{g})\le 1 \text{ et } \forall x\in[0,1] \qquad \widehat{g}(x) = g(x)$$

II.D.2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose $g_n(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}}\widehat{g}(t)dt$.

Montrer que g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à dérivée bornée par 1.

Montrer que la suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{g}$.

II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites S et C sont celles définies dans le préambule.

Soit $f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

II.E.1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $(f|C_n)$ en fonction de $(f'|S_{n-1})$.

II.E.2) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \le \frac{1}{\pi^2}\|f'\|^2$$

II.F - Soit $f\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$.

II.F.1) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \le \frac{1}{\pi^2}k(f)^2$$

II.F.2) En déduire alors que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_c^{n-1}(f)\le\dfrac{1}{n\pi}k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de E est toujours minorée par une suite de la forme $(\Gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Γ est une constante positive indépendante de la suite choisie dans E.

III.A - Soient $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites orthonormales de E.

Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n + \sum_{j=0}^{m} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m + 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

III.B - On donne maintenant une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale de E.

On suppose de plus que toutes les fonctions Φ_n sont lipschitziennes dans $[0,1]$.

III.B.1) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3$$

III.B.2) Montrer que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

III.B.3) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} k(\Psi_n) = +\infty$.

III.B.4) Trouver la valeur de $k(C_n)$.

III.B.5) Montrer qu'il existe un réel $\Gamma > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ telle que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ soit une suite croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ k(\Psi_n) \geq \Gamma n$$

Ce résultat est dû à W. Rudin (1952).

Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

Le but de cette dernière partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de E constituée de polynômes.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \qquad , \qquad P_n = U_n^{(n)} \qquad , \qquad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

La notation $f^{(n)}$ représente la dérivée n-ième de la fonction f.

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^{1} P_m(x)\ P_n(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

IV.A - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R},\ Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x - 1)$$

est une suite orthonormale de E.

Donner la valeur de α_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, la notation Q_n désigne l'élément ainsi calculé.

IV.B -

IV.B.1) Soit $f \in E$ donné. Montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

IV.B.2) Montrer que la suite Q définie ci-dessus est totale dans E.

Pour cela on pourra montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction $f \in E$ donnée.

IV.B.3) Déterminer toutes les suites orthonormales $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E possédant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n$$

IV.C - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R},\ P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

IV.D - Soient $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La lettre θ désigne une variable réelle.

IV.D.1) Démontrer que si $|x| \le 1$ alors $L_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta$.

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta = \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ e^{-i\theta}\right)$$

IV.D.2) Établir que

$$\max_{x \in [-1,+1]} |L_n(x)| = 1$$

Quelles sont les valeurs de $x \in [-1,+1]$ telles que $|L_n(x)| = 1$?

IV.E -

IV.E.1) En remarquant que $(x^2-1)U'_n(x) = 2nxU_n(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

IV.E.2) Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

IV.F - Calculer enfin la valeur $k(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• • • FIN • • •
