MATHÉMATIQUES I

La première partie de ce problème est consacrée à la description d'une procédure géométrique qui aboutit naturellement à la construction d'une fonction continue $x\ :\ ]0,\pi[\ \to \mathbb{R}$ que l'on étudie sommairement à la Partie II. La troisième partie concerne les propriétés de dérivabilité des fonctions continues $2\pi-$ périodiques ayant une série de Fourier lacunaire. Enfin, à la Partie IV on combine les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction x n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et on désigne par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et $2\pi-$ périodiques.

Si $f \in C_{2\pi}$ on rappelle que ses coefficients de Fourier sont donnés pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$, la série de Fourier (formelle) de f étant $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$.

Partie I - Définition de la fonction x

I.A - On suppose l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $T\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$T(x, x, 0) = (x, x, 0)$,

$T(x, y, z) = (x', y', z')$ où $x' = y$ et (y', z') est la projection orthogonale de $(y, -z)$ sur la droite passant par $(x, 0)$ et (y, z) si $(x, y, z) \neq (x, x, 0)$.

I.A.1) On suppose $x \neq y$, $z \neq 0$ et l'on pose $A = (x, 0)$, $B = (y, z)$, $C = (y, -z)$, $A' = (x', 0)$, $B' = (y', -z')$, $C' = (y', z')$ où $(x', y', z') = T(x, y, z)$.

Que représentent les points A', B', C' par rapport au triangle ABC ?

I.A.2) Montrer que si $(x, y, z) \neq (x, x, 0)$ alors

$$y' - x' = -\frac{2z^2(y-x)}{(y-x)^2 + z^2},\ z' = z\frac{(y-x)^2 - z^2}{(y-x)^2 + z^2}.$$

I.B - Pour $t \in]0,\pi[$ on pose $X_0(t) = (0, 1, \operatorname{cotan} t)$ et on définit par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ la suite $X_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))$ par $X_{n+1}(t) = T(X_n(t))$.

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in]0,\pi[$. Montrer que, si l'on a $z_n(t) = 0$, alors $z_{n+1}(t) = 0$ et $y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = 0$.

Filière PC

Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $t \in]0,\pi[$ est tel que $z_n(t) \neq 0$ si $0 \leq n \leq N-1$.

a) Montrer que, pour ces valeurs de n ,

$$\frac{y_n(t) - x_n(t)}{z_n(t)} = \tan(2^n t) .$$

b) On suppose de plus à présent que $z_N(t) = 0$. Montrer que :

$$\left(\frac{y_{N-1}(t) - x_{N-1}(t)}{z_{N-1}(t)}\right)^2 = 1 \text{ et que } \cos(2^N t) = 0 .$$

I.B.2) Montrer que

$$\forall n \geq 0 ,\ \forall t \in]0,\pi[,\ y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = -2\cos^2(2^n t)(y_n(t) - x_n(t)) .$$

I.B.3) En déduire :

$$\forall n \geq 0 ,\ \forall t \in]0,\pi[,\ x_{n+1}(t) - x_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2(t)} .$$

I.B.4) On pose pour $n \geq 0$ $u_n(t) = \sin^2(t) x_n(t)$. Montrer que la suite (u_n) converge simplement vers une fonction u continue sur $]0,\pi[$. En déduire que la suite (x_n) converge simplement vers une fonction x continue sur $]0,\pi[$.

I.B.5) Montrer que la fonction u se prolonge en une fonction paire (que l'on appellera encore u) de $C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

I.B.6) Calculer $z_n(t)$ pour $n \geq 0$, $t \in]0,\pi[$ et étudier la limite simple de cette suite de fonctions sur $]0,\pi[$.

Partie II - Étude de quelques propriétés de la fonction x

II.A - Calculer $x(\pi/4)$, $x(\pi/3)$, $x(\pi/2)$; montrer que $x(\pi - t) = x(t)$, $t \in [0, \pi[$.

II.B -

II.B.1) On pose pour $n \geq 1$, $t \in]0,\pi[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right) .$$

Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\forall t \in]0,\pi[\,,\ 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = (-1)^n (u(t) + \varphi_n(t)).$$

II.B.2) Montrer que la suite (φ_n) converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction φ de classe C^1.

II.C -

II.C.1) Montrer que les suites

$$\alpha_n = 2^{-2n} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+2}}\right),\ \beta_n = 2^{-(2n+1)} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+3}}\right) \text{ sont convergentes :}$$

déterminer leurs limites puis une valeur approchée de celles-ci à 10^{-3} près.

II.C.2) Montrer que $\lim_{n \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = +\infty$ et qu'il existe une suite de nombres $t_n \in]0,\pi[$ convergeant vers 0 telle que $x(t_n) = 0$.

Partie III - Séries de Fourier lacunaires

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$ et $I_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4 dt$.

III.A -

III.A.1) Montrer que : $\forall t \in]-\pi\,,\pi[\setminus\{0\}\,,\ D_N(t) = \dfrac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

III.A.2) Montrer que : $I_N \geq \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{t^4} dt$

et en déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall N \geq 0$, $I_N \geq CN^3$.

Dans toute la suite de la Partie III, $a = (a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty$.

III.B -

III.B.1) Pour $n \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ on pose $v_n(t) = 2a_n \cos 2^n t$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $v \in C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

Désormais v désigne cette fonction (associée à la suite a) et t_0 un réel tel que v est dérivable en t_0 (on suppose l'existence d'un tel t_0).

Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_{n_0}(t) = e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[v(t+t_0) - v(t_0)\cos t - v'(t_0)\sin t]$.

III.B.2) Montrer que $H_{n_0} \in C_{2\pi}$ et que H_{n_0} est dérivable en 0. Calculer $H_{n_0}(0)$ et $H'_{n_0}(0)$.

III.B.3) Calculer $\hat{H}_{n_0}(0)$ à l'aide de la suite a et montrer que $\hat{H}_{n_0}(k) = 0$ si

$k \in \mathbb{Z}^* \cap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

III.C - On suppose désormais $n_0 \geq 6$. Soit $N = 2^{n_0-4}$ et $g_N(t) = I_N^{-1} D_N(t)^4$.

III.C.1) Montrer que pour tout nombre entier j tel que $-4N \leq j \leq 4N$, il existe α_j tel que :

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g_N(t) = \sum_{j=-4N}^{4N} \alpha_j e^{ijt}.$$

III.C.2) Calculer

$\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t) g_N(t) dt$ à l'aide de la suite a.

III.D - On pose $K(t) = \left|\dfrac{H_{n_0}(t)}{t}\right|$ si $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, $K(t) = 0$ si $t = 0$ ou $|t| > \pi$ (noter que la fonction K ne dépend pas de n_0).

III.D.1) Montrer que K est bornée sur $\mathbb{R}$. Étudier sa limite en 0.

III.D.2) Montrer qu'il existe $C' > 0$ telle que

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq C' \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin^4 t}{|t|^3} dt.$$

III.D.3) Étudier la limite de la suite $(2^n a_n)_{n \geq 0}$.

Partie IV -

Utiliser les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction x définie en Partie I n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

••• FIN •••