

# MATHÉMATIQUES I

## Notations, définitions et rappels

Si  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathbb{C}_n[X]$  l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , soit  $T(P)$  le polynôme  $P(X+1)$ . L'application  $T$  ainsi définie est clairement un endomorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ . De plus, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{C}_n[X]$  est stable par  $T$  et on note  $T_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$  induit par  $T$ . Soit  $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, H_i = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X-k).$$

Si  $R \in \mathbb{R}_+^*$ , soient :

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}, \overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\} \text{ et } C_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$$

On convient d'autre part que  $D_\infty = \mathbb{C}$ . Pour  $R$  dans  $\mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$ , soit  $E_R$  l'espace vectoriel des fonctions de  $D_R$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $R$ . L'espace  $E_\infty$  est appelé *espace des fonctions entières*.

On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\text{si } n \rightarrow +\infty, n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

## Objectif du problème, dépendance des parties

La partie I étudie les polynômes de Hilbert, ce qui permet notamment de déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ . La partie II est complètement indépendante de I. Elle a pour but d'établir quelques propriétés des séries entières utilisées dans la partie III, laquelle montre que toute fonction entière vérifiant une certaine condition asymptotique est un polynôme. Le résultat obtenu est dû à Georg Pólya (1915). La partie III utilise II et la dernière question de I.

# Filière PSI

## Partie I - Polynômes de Hilbert

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

### I.A - Inversion d'une matrice

I.A.1) Écrire la matrice  $M_n$  de  $T_n$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

I.A.2) Vérifier que  $M_n$  est inversible ; expliciter  $M_n^{-1}$ .

### I.B - Propriétés de la suite $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$

I.B.1) Montrer que  $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

I.B.2) Si  $j \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \mathbb{N}^*$ , donner une expression simple de  $H_i(j)$  montrant que  $H_i(j)$  est dans  $\mathbb{Z}$ . On distinguera les trois cas :  $j < 0$ ,  $0 \leq j \leq i-1$  et  $j \geq i$ .

### I.C - Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

Soit  $P$  dans  $\mathbb{C}_n[X]$ . On décompose  $P$  sur  $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$  en :

$$P = \sum_{i=0}^n a_i H_i.$$

I.C.1) Vérifier l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

où  ${}^t M_n$  est la transposée de la matrice  $M_n$ .

I.C.2) Établir :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} C_i^j P(j).$$

Si  $i \geq n+1$ , que vaut  $\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$  ?

I.C.3) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(i) \in \mathbb{Z}$ ,
- $\forall i \in \{0, \dots, n\}, a_i \in \mathbb{Z}$ ,
- $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

En particulier les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$  sont les combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  des polynômes de Hilbert.

**I.D - Description des suites de la forme  $(P(j))_{j \in \mathbb{N}}$  où  $P$  est un polynôme.**

Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  tel que :  $\forall j \in \mathbb{N}, u_j = P(j)$ ,
- 

$$\forall i \in \mathbb{N}, i \geq n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} C_i^j u_j = 0.$$

## Partie II - Quelques propriétés des séries entières

Dans toute cette partie, on fixe :  $R$  dans  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ ,  $f$  dans  $E_R$ ,  $\omega$  dans  $D_R$  et  $r$  dans  $]|\omega|, R[$ . Pour  $z$  dans  $D_R$  on écrit donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $R$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  on note  $f^{(k)}$  la fonction définie pour  $z \in D_R$  par :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

(on sait que cette série entière a même rayon de convergence que la série entière initiale).

**II.A - Représentation intégrale de  $f(\omega)$  à partir des valeurs de  $f$  sur  $C_r$**

II.A.1) Si  $p \in \mathbb{N}$ , prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p.$$

II.A.2) Montrer :

$$f(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}.$$

Indication : on pourra partir de :

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{\omega}{re^{it}} \right)^p.$$

**II.B - Principe du maximum**

II.B.1) Justifier la définition de  $M_f(r) = \text{Max}\{|f(z)|, z \in C_r\}$ .

II.B.2) Montrer :  $|f(\omega)| \leq \frac{r}{r-|\omega|} M_f(r)$ .

II.B.3) Montrer :  $|f(\omega)| \leq M_f(r)$ .

Indication : si  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pourra appliquer, avec justification, le résultat de II.B.2 à  $f^p$  puis faire tendre  $p$  vers  $+\infty$ .

**II.C - Division de  $f(z) - f(\omega)$  par  $z - \omega$  pour  $f$  dans  $E_R$**

II.C.1) Si  $j \in \mathbb{N}$ , montrer la convergence de la série de terme général  $a_n \omega^{n-1-j}$  pour  $n \geq j+1$ . On pose :

$$b_j = \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1-j}.$$

II.C.2) Montrer que, lorsque  $j \rightarrow +\infty$ ,  $b_j = O\left(\frac{1}{j}\right)$ .

II.C.3) Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$  est supérieur ou égal à  $R$ . Pour  $z \in D_R$ , on pose :

$$g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j.$$

Vérifier :  $\forall z \in D_R, (z - \omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$ .

**II.D - Minoration de  $M_f(r)$  à l'aide des zéros de  $f$**

On suppose que  $p \in \mathbb{N}^*$ , que  $f$  s'annule en  $p$  points distincts  $z_1, \dots, z_p$  de  $\overline{D}_r \setminus \{0\}$ .

II.D.1) Montrer qu'il existe  $F$  dans  $E_R$  telle que :

$$\forall z \in D_R, F(z) \times \prod_{j=1}^p (z - z_j) = f(z) \times \prod_{j=1}^p (r^2 - \bar{z}_j z).$$

II.D.2) Si  $j \in \{1, \dots, p\}$  et  $z \in C_r \setminus \{z_j\}$  que vaut

$$\left| \frac{r^2 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right| ?$$

II.D.3) En appliquant II.B.3 à  $F$  au point  $\omega = 0$ , montrer :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \geq |f(0)| r^p.$$

II.D.4) On suppose  $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Prouver :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \geq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}.$$

### II.E - Étude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$

On suppose que  $R = +\infty$ ,  $c \in ]0, e[$ ,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{N}$  et que lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $M_f(r) = O(c^r)$ .

Montrer que  $f = 0$ .

Indication : on supposera par l'absurde  $f \neq 0$ , on appliquera II.D.4 avec  $k = \min\{i \in \mathbb{N}, f^{(i)}(0) \neq 0\}$ ,  $r = p$ ,  $z_1 = 1, \dots, z_p = p$ , et on fera tendre  $p$  vers  $+\infty$ .

## Partie III - Théorème de Pólya

Soit  $f$  dans  $E_\infty$ .

III.A - Majoration de  $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(k) \right|$

Soient  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $r$  un réel tel que  $r > n$ .

III.A.1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}.$$

III.A.2) À l'aide de II.A.2, prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\dots(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k).$$

III.A.3) Montrer :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| \leq \frac{n! M_f(r)}{(r-1)\dots(r-n)}.$$

**III.B - Preuve du théorème**

On suppose ici

a)  $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ ,

b) Lorsque  $r \rightarrow +\infty$ ,  $M_f(r) = o\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$ .

On va démontrer que  $f$  est polynomiale (théorème de Pólya).

N.B. L'exemple de  $f(z) = 2^z$  montre que la condition asymptotique (b) n'est pas loin d'être optimale.

III.B.1) En appliquant III.A.3 à  $r = 2n + 1$ , prouver qu'il existe  $N$  dans  $\mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = 0.$$

III.B.2) À l'aide de I.D) et II.E), prouver le résultat désiré.

---

**••• FIN •••**

---