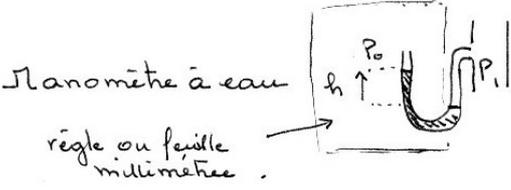


CENTRALE PC1 2003

ECHANGES ENTRE UNE GROSSE BULLE ET UNE PETITE BULLE

1	IA	<p>On peut utiliser un <b>manomètre à eau</b> : un tube coudé          Au lycée, vous avez vu un tel manomètre          sur l'expérience de Clément et Desormes par exemple.</p> 	
2	IB	<p>Lorsque le robinet va s'ouvrir, les pressions vont tendre à s'égaliser dans les deux bulles. Le gaz s'écoule de la bulle de plus forte pression vers la bulle où la pression est la plus faible.          Or, comme <math>p-p_0</math> est inversement proportionnel au rayon de la bulle :  <b>La petite bulle ( grande pression) se vide dans la grande ( faible pression)</b></p>	
2	IC1	<p><b>Définition du potentiel thermodynamique :</b>  <i>on appelle potentiel thermodynamique d'un système soumis à un certain nombre de contraintes ( détaillées plus loin ), une fonction <math>\phi</math>, dépendant des paramètres d'état du système, et éventuellement des contraintes extérieures, telle que</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- lors d'une évolution spontanée du système, cette fonction <math>\phi</math> tend à diminuer;</li> <li>- l'équilibre thermodynamique correspondant à un minimum de <math>\phi</math>.</li> </ul>	
2	IC2	<p><math>\Delta U = U_F - U_I = W + W' + Q</math>  <math>Q = T_0 \Delta S_{\text{éch}} \leq T_0 \Delta S</math>  <b><math>W \geq [U_F - T_0 S_F + P_0 V_F] - [U_I - T_0 S_I + P_0 V_I]</math></b>          Si le système évolue sans travail autre que celui des forces de pression, la relation précédente devient : <b><math>G^*_F \leq G^*_I</math></b> : la fonction <math>G^*</math> diminue donc au cours de l'évolution du système : à l'équilibre <math>G^*</math> est minimale.          La fonction <math>G^*</math> est donc un <u>potentiel thermodynamique</u> pour le problème envisagé.</p>	
1	IC3a	<p><b>U, S, et V sont extensifs</b>  <math>U = U_1 + U_2 + U_{m1} + U_{m2} \quad \Rightarrow \quad G^* = U - TS + P_0 V</math>  <math>S = S_1 + S_2 + S_{m1} + S_{m2} \quad \mathbf{dG^* = dU - TdS - SdT + P_0 dV}</math>  <math>V = V_1 + V_2</math>          Avec <math>dU_m = TdS_m + \sigma d\Sigma_m</math>          d'où <math>dG^* = dU_1 + dU_2 - TdS_1 - TdS_2 - S_1 dT - S_2 dT + \sigma d\Sigma_{m1} + \sigma d\Sigma_{m2} + P_0 dV_1 + P_0 dV_2</math></p>	
1	IC3b	<p><math>\Sigma = 8 \pi r^2 \quad \mathbf{d\Sigma = 16 \pi r dr}</math> et <math>\mathbf{dV = 4 \pi r^2 dr}</math>  <math>+\sigma d\Sigma_m + P_0 dV = (4\sigma/r + P_0) dV = PdV</math></p>	
1	IC3c	<p>En égalant la différentielle de <math>G</math> : <math>dG_i = dU_i - TdS_i - S_i dT + P_i dV_i + V_i dP_i</math> avec l'expression donnée dans l'énoncé <math>dG_i = -S_i dT + V_i dP_i + \mu_i dN_i</math> on obtient  <b><math>dU_i = TdS_i - P_i dV_i + \mu_i dN_i</math></b>          En remplaçant <math>dG^*</math>, on obtient <math>dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2</math></p>	
1	IC3d	<p><math>dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2 = f(T)(dN_1 + dN_2) + RT(\ln p_1 dN_1 + \ln p_2 dN_2)</math>          or <math>\mathbf{dN_1 = -dN_2}</math>, d'où <math>\mathbf{dG^* = RT \ln(p_1/p_2) dN_1}</math></p>	
4	IC4	<p><b>2 équations de Laplace</b></p>	

$$(1) p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_1}$$

$$(2) p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_2}$$

2 équations d'état

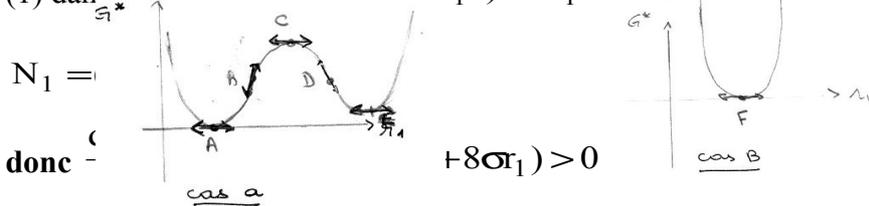
$$(3) p_1 \left( \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right) = N_1 RT$$

$$(4) p_2 \left( \frac{4}{3} \pi r_2^3 \right) = N_2 RT$$

Equation de conservation de la matière (5)  $N_1 + N_2 = N = \text{constante}$

$$(1) \Rightarrow dp_1/dr_1 = -4\sigma/r_1^2 < 0$$

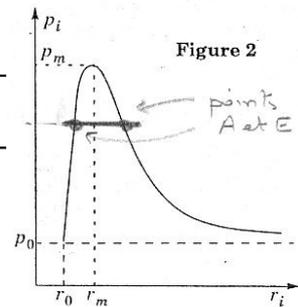
$$(1) \text{ dans } (2) \Rightarrow (p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}) \left( \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right) = N_1 RT \Rightarrow$$



Quand  $r_1$  croît :  $p_1$  décroît,  $N_1$  croît

(5)  $\Rightarrow N_2$  décroît et comme  $dN_2/dr_2 > 0$ ,  $r_2$  décroît et  $dp_2/dr_2 < 0$   $p_2$  croît

2	IC5	Si $r_1 > r_2$ , alors $p_1 < p_2$ donc or $dG^* = RT \ln(p_1/p_2) dN_1 < 0 \Rightarrow dN_1 > 0$ <b><math>N_1</math> va croître, la grosse bulle va croître au détriment de la petite</b> <b>Un état initial <math>r_1=r_2</math> est un équilibre instable</b>
1	ID1	Quand on gonfle un ballon, il faut "souffler fort" au début ( forte variation de pression nécessaire pour obtenir une faible variation de $r$ ), après , cela devient plus facile
2	ID2a	
2	ID2b	<b>L'état final correspond à un minimum de <math>G^*</math></b> <b>Donc A ou E dans le cas a) et F dans le cas b)</b>
2	ID3	Comme au IC4 , on écrit $\left( p_0 + K \left( \frac{1}{r_i} - \frac{r_0^6}{r_i^7} \right) \right) \left( \frac{4}{3} \pi r_i^3 \right) = N_i RT$ Soit $N_i = \frac{4\pi}{3RT} \left( p_0 r_i^3 + K r_i^2 - \frac{K r_0^6}{r_i^4} \right)$ donc en dérivant $\frac{dN_i}{dr_i} = \frac{4\pi}{3RT} (p_0 3r_i^2 + 2K r_i + 4K r_0^6 r_i^{-5}) > 0$  Si la première bulle atteint $r_m$ , alors $N_1 = p_m (4\pi r_m^3 / 3) / RT$ et $N_2 = N - N_1 = N_1$ Les deux bulles ont alors même rayon.  Le comportement est analogue aux bulles de savon dans le <b>cas a)</b> : l'état final est alors constitué de deux ballons de rayons différents



# Centrale PCI 2003 Problème II

## Le phénomène de LEIDENFROST

### IIA Approche qualitative

IIA	Plus la plaque est chaude, plus l'énergie transférée sera importante, donc plus $\tau$ est petit.
-----	---

### II B Etude thermodynamique

I IB1	L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu_v C_v} \Delta \Gamma = D_{th} \Delta \Gamma$
I IB2	$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \gg \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \text{ si } \frac{T}{z^2_{\text{caractéristique}}} \gg \frac{T}{r^2_{\text{caractéristique}}} \Rightarrow \left[ \frac{r_{\text{caractéristique}}}{z_{\text{caractéristique}}} \right]^2 \gg 1$ <p>Ici, la dimension caractéristique selon z est e et la dimension caractéristique selon r est a</p> <p>Le résultat est valide si <math>\left[ \frac{r_{\text{caractéristique}}}{z_{\text{caractéristique}}} \right]^2 = \left[ \frac{a}{e} \right]^2 \gg 1</math></p>
I IB3	<p>Equation la chaleur <math>\Rightarrow \frac{T}{\tau^*} = D_{th} \frac{T}{e^2} \Rightarrow \tau^* = \frac{e^2}{D_{th}}</math></p> <p>Le régime permanent est atteint " instantanément " pour <math>\tau^* \ll \tau_1</math></p>
I IB4	$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ <p>qui s'intègre en <math>T = \alpha z + \beta</math> avec les C. Lim <math>\left\{ \begin{array}{l} T(r, 0, t) = T_p \Rightarrow \beta = T_p \\ T(r, e, t) = T_e \Rightarrow \alpha = \frac{T_e - T_p}{e(t)} \end{array} \right.</math></p> <p>donc <math>T(r, z, t) = (T_e - T_p) \frac{z}{e(t)} + T_p</math></p> <p>Remarque : bien qu'on ait pris <math>\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0</math>, on a une solution dépendant de t par e(t)</p>
I IB5	$\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } T \Rightarrow j_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\lambda}{e(t)} (T_e - T_p)$
I IB6	$\Phi = \iint j_z dS \Rightarrow j_z \pi a^2 \Rightarrow \Phi = \frac{\pi a^2 \lambda}{e(t)} (T_p - T_e)$ <p>La résistance thermique est <math>R_{th} = \frac{1}{\lambda S} = \frac{1}{\lambda \pi a^2} = \frac{\Phi}{(T_p - T_e)}</math></p>
I IB7	<p>a) Système fermé = la couche d'eau liquide qui va se vaporiser entre t et t+dt, de masse <math>D_m dt</math></p> <p>L'enthalpie de cette couche varie de <math>dH = (D_m dt) l_v</math></p> <p>Elle reçoit pendant dt une énergie thermique <math>\delta Q = \Phi dt = \frac{\pi a^2 \lambda}{e(t)} (T_p - T_e) dt</math></p> <p>Et pour cette transformation isobare : <math>dH = \delta Q</math></p>

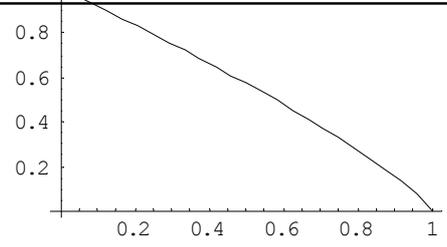
	<p>Donc <math>D_m = \frac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v}</math></p> <p>b) Le rayon de la goutte passe donc de <math>a(t)</math> à <math>a(t+dt)</math>, la masse <math>D_m dt</math> s'étant évaporée :</p> $D_m dt = \mu_l \left( \frac{2\pi a(t)^3}{3} - \frac{2\pi a(t+dt)^3}{3} \right) = -\frac{2\pi}{3} \mu_l \frac{da^3}{dt} dt \Rightarrow \Rightarrow D_m = -2\pi \mu_l a^2 \frac{da}{dt}$ $\frac{da}{dt} = -\frac{D_m}{2\pi \mu_l a^2} = -\frac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v} \frac{1}{2\pi \mu_l a^2} = -\frac{\lambda (T_p - T_e)}{2\mu_l e(t) l_v}$
--	---

### II C Modèle A

I IC1	<p>a) <math>\delta m = \mu_v (\pi a^2 v_0 dt)</math></p> <p>b) <math>P(t+dt) = \delta m (-v_0 e_z)</math> et <math>P(t) = 0 \Rightarrow</math></p> $\frac{dP}{dt} = \frac{\delta m}{dt} (-v_0 e_z) = -\mu_v \pi a^2 v_0^2 e_z$
I IC2	$\frac{dP}{dt} = \Sigma f_{ext} = Poids = \mu_l \frac{2\pi}{3} a^3 g \Rightarrow \mu_l \frac{2\pi}{3} a^3 g = \mu_v \pi a^2 v_0^2 \Rightarrow$ $v_0 = \sqrt{\frac{2ga\mu_l}{3\mu_v}}$
I IC3	$Dm = -\frac{\delta m}{dt} = \mu_v \pi a^2 v_0 \text{ et } D_m = \frac{\pi a^2 \lambda (T_p - T_e)}{e(t) l_v} \quad (II B7)$ $\mu_v \pi a^2 \sqrt{\frac{2ga\mu_l}{3\mu_v}} = \pi a^2 \frac{\lambda (T_p - T_e)}{e l_v} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{3\lambda^2 (T_p - T_e)^2}{2g\mu_l \mu_v l_v^2}}$
I IC4	$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda (T_p - T_e)}{2\mu_l e l_v} = -\frac{\lambda (T_p - T_e)}{2\mu_l l_v} \sqrt{a} \sqrt{\frac{2g\mu_l \mu_v l_v^2}{3\lambda^2 (T_p - T_e)^2}} \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\sqrt{a} \sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}}$ <p>Cette équation s'intègre en : <math>\frac{da}{\sqrt{a}} = -\frac{dt}{\tau}</math> soit <math>\sqrt{a} - \sqrt{a_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{t-0}{\tau} \right)</math></p> <p>Donc <math>a(t) = \left[ \sqrt{a_0} - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}} \right]^2</math></p>
I IC5	<p>Durée de vie de la goutte : <math>\tau_A = \frac{2\sqrt{a_0}}{\sqrt{\frac{g\mu_v}{6\mu_l}}} \Rightarrow \tau_A = 1.85s</math></p>
I IC6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La durée de vie obtenue est très inférieure aux durées observées (<math>\tau \cong 50s</math>)</li> <li>• <math>\tau_A</math> ne dépend pas de la température, contrairement à l'expérience (fig 6)</li> <li>• l'allure de la courbe <math>a(t)</math> n'est pas celle de la figure 5 (par exemple, <math>da/dt</math> ne tend pas vers l'infini pour <math>\tau = \tau_A</math>)</li> </ul>

### IID Modèle B

IID1	La masse vaporisée par unité de temps : $\mu_v \pi r^2 v_0$ est éjectée par la face latérale de ce
------	--

	<p>cylindre</p> <p>Ce flux de masse vaut : <math>\iint \mu_v v ds = \mu_v u(r) (2\pi e) \Rightarrow u(r) = \frac{r}{2e} v_0</math></p>
IID2	<p>a) Pour un écoulement <b>Parfait, Homogène, Incompressible, Stationnaire et Irrotationnel</b>, le théorème de Bernoulli s'écrit en négligeant le rôle de la pesanteur:</p> $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \text{constante} = \frac{p_0}{\mu} + \frac{u(a)^2 + w(e)^2}{2}$ <p>b) En négligeant le terme en w :</p> $\frac{p}{\mu} = \frac{p_0}{\mu} - \frac{u(r)^2 - u(a)^2}{2} \Rightarrow p(r) = p_0 + \mu \frac{v_0^2}{8e^2} (a^2 - r^2)$
IID3	$F_B = \iint p ds = \iint_{\text{disque de rayon } a} (p(r, z) - p_0) 2\pi r dr e_z$ $\vec{F}_B = \vec{e}_z \int_0^a \mu \frac{v_0^2}{8e^2} (a^2 - r^2) 2\pi r dr = \vec{e}_z \mu \frac{2\pi v_0^2}{8e^2} \left[ a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \Rightarrow \vec{F}_B = \vec{e}_z \frac{\mu \pi v_0^2 a^4}{16e^2}$
IID4	<p>L'équation donnée se met sous la forme :</p> $\left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{5/4} = 1 - \frac{t}{\tau_B} \text{ soit encore :}$ $\frac{a(t)}{a_0} = \left[ 1 - \frac{t}{\tau_B} \right]^{4/5}$ <p>Le graphe est donc</p> <p>Avec une tangente verticale en <math>t = \tau_B</math> comme dans l'expérience.</p>  <p style="text-align: right;">Plot<math>[(1-t)^{4/5}, \{t, 0, 1\}]</math></p> <p><math>\tau_B \cong 5 \text{ s}</math></p> <p><u>Conclusion</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• On a la bonne allure pour la courbe ( tangente verticale)</li> <li>• Le temps est encore nettement plus petit que <math>\tau_1</math></li> <li>• <math>\tau_B</math> dépend de <math>T_p</math> contrairement au modèle A</li> </ul> <p>Le modèle n'est pas encore pleinement satisfaisant</p>

## II E Modèle C

IIE1	$\begin{array}{cccccc} \mu_v \frac{\partial u}{\partial t} & \mu_v u \frac{\partial u}{\partial r} & \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} & \frac{\eta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} & \eta \frac{u}{r^2} \\ \mu_v \frac{U}{\tau_1} & \mu_v \frac{U^2}{a} & \eta \frac{U}{e^2} & \eta \frac{U}{a^2} & \eta \frac{U}{a^2} & \eta \frac{U}{a^2} \end{array}$ <p>Les trois derniers termes en <math>U/a^2</math> sont négligeables devant le précédent (<math>\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}</math>) car <math>e \ll a</math></p> <p>Le terme dépendant du temps est négligeable si :</p> $\left[ \mu_v \frac{\partial u}{\partial t} \right] \ll \left[ \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \Rightarrow \mu_v \frac{U}{\tau_1} \ll \eta \frac{U}{e^2} \Rightarrow \frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} \ll 1$ <p>et le terme <math>\left[ \mu_v u \frac{\partial u}{\partial r} \right] \ll \left[ \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \Rightarrow \mu_v \frac{U^2}{a} \ll \eta \frac{U}{e^2} \Rightarrow \frac{\mu_v U e^2}{\eta a} \ll 1</math></p>
------	---

IIE2	<p>P ne dépend que de r ( indépendant de z) L'équation (6) s'intègre en</p> $u(z) = \left(\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{z^2}{2} + \beta z + \gamma$ <p>avec <math>u(0) = 0 \Rightarrow \gamma = 0</math> et <math>u(e) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{e^2}{2} + \beta e = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{e}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r}</math></p> <p>donc <math>u(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} (z - e)z</math></p>
IIE3	$D_v = \int_0^e 2\pi r dz u(z) = 2\pi r \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \left[ \frac{z^3}{3} - e \frac{z^2}{2} \right]_0^e \Rightarrow D_v = -\frac{\pi r}{6\eta} \frac{\partial p}{\partial r} e^3$ <p>notez que <math>\frac{\partial p}{\partial r} &lt; 0</math>, donc <math>D_v &gt; 0</math></p>
IIE4	<p>L'écoulement est incompressible, donc <math>\text{div } v = 0</math>, donc <math>\frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0</math></p> <p>ru est donc indépendant de r</p> <p>Or, d'après IIE2, <math>ru(z) = \frac{1}{2\eta} r \frac{\partial p}{\partial r} (z - e)z</math> donc <math>r \frac{\partial p}{\partial r}</math> est indépendant de r</p> $ru(z) = \frac{6\eta}{2\eta\pi e^3} D_v (z - e)z \Rightarrow u \text{ en } \frac{1}{r}$ <p><math>D_v</math> indépendant de r est bien cohérent avec <math>\text{div } v = 0</math></p>
IIE5	$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\eta D_v}{\pi e^3} \frac{1}{r} \Rightarrow p(r) - p_0 = -\frac{6\eta D_v}{\pi e^3} \ln \frac{r}{a}$ <p>car <math>p(r=a) = p_0</math></p>
IIE6	$[D_v] = \text{volume/temps} = L^3 T^{-1}$ $[\eta] = \text{Pression} \cdot \text{Temps} (\text{voir données de l'IE 7 par exemple}) = \frac{\text{Force}}{L^2} T$ $[a] = [e] = L$ <p>donc <math>[F] = \left[ \frac{3\eta D_v a^2}{e^3} \right] = \left( \frac{\text{Force}}{L^2} T \right) \frac{L^3 T^{-1}}{L} = \text{Force}</math></p>
IIE7	$\tau_c = 36 \text{ s}$ enfin une durée proche du temps expérimental !
IIE8	<p>a) <math>e = 0.3 \text{ mm}</math></p> $\left[ \frac{e}{a} \right]^2 = \left[ \frac{0.3}{1} \right]^2 \approx \frac{1}{10}$ l'approximation $\left[ \frac{e}{a} \right]^2 \ll 1$ est limite <p>b) <math>\tau^* = \frac{e^2}{D} = \frac{(3 \cdot 10^{-4})^2}{10^{-4}} \approx 10^{-3} \text{ s}</math></p> <p><math>\tau^* \ll \tau_1</math> il est légitime de supposer le régime permanent atteint.</p> <p>c) L'accélération locale : <math>\mu_v \frac{\partial u}{\partial t}</math> est négligeable si <math>\frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} \ll 1</math></p> $\frac{\mu_v e^2}{\eta \tau_1} = \frac{0.7 * (3 \cdot 10^{-4})^2}{10^{-3} 50} = 1.3 \cdot 10^{-6} \ll 1$ Approximation valide

d) L'accélération convective  $\mu_v u \frac{\partial u}{\partial r}$  est négligeable si  $\frac{\mu_v U e^2}{\eta a} \ll 1$

$$\frac{\mu_v U e^2}{\eta a} = \frac{0.7 * 0.5 (3 \cdot 10^{-4})^2}{10^{-3} 10^{-3}} \approx 3 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad \text{Approximation valide}$$

e) Pour  $t \approx \tau_1$ ,  $a \approx 0$  donc l'approximation  $\left[ \frac{e}{a} \right]^2 \ll 1$  devient fautive