MATHÉMATIQUES I

Notations, définitions

Si I est un intervalle, F une application de I dans I, n un élément de $\mathbb{N}^*$, on pose $F^n = F \circ \ldots \circ F$ (composé de n fois F) ; on convient que $F^0 = Id_I$. Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F une application de I dans J, on dit que F est un C^1-difféomorphisme de I sur J si et seulement si F est une bijection de classe C^1 de I sur J dont la réciproque est elle aussi de classe C^1. On rappelle que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que F soit de classe C^1, que la dérivée F' de F ne s'annule pas sur I, et que $F(I) = J$.

On désignera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, r]$ avec $r > 0$ et f une application de classe C^∞ de I dans lui-même vérifiant :

i) $f(0) = 0$,

ii) $\forall x \in I \backslash \{0\}$, $f(x) < x$,

iii) $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$.

Si (I, f) et (J, g) sont dans $\mathcal{E}$, on dit que (I, f) et (J, g) sont *conjugués* si, et seulement si, existent deux réels r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $[0, r] \subset I$, $[0, r'] \subset J$ et un C^1-difféomorphisme croissant h de $[0, r]$ sur $[0, r']$ tel que :

$$\forall y \in [0, r'],\ g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y).$$

Enfin, si λ est dans $]0, 1]$, $\mathcal{E}_\lambda$ désigne l'ensemble des couples (I, f) éléments de $\mathcal{E}$ tels que $f'(0) = \lambda$.

Objectif du problème

Le but du problème est de prouver que si λ est dans $]0, 1]$, alors deux éléments quelconques de $\mathcal{E}_\lambda$ sont conjugués puis d'étudier le problème de la conjugaison dans $\mathcal{E}_1$.

Dépendance des parties

Le résultat du I.D est utilisé dans les parties II et III. Les parties II et III sont formellement indépendantes, mais certaines questions de la partie III se traitent sur le modèle de questions de la partie II ; elles sont explicitement signalées dans l'énoncé.

Filière PSI

Partie I - Préliminaires

I.A - Soit (I, f) et (I, g) deux éléments conjugués de $\mathcal{E}$. Montrer que $f'(0) = g'(0)$.

I.B - Soit f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}$.

I.B.1) Montrer que $f'(0)$ est dans $]0, 1]$.

I.B.2) Montrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

I.B.3) Montrer que cette convergence est uniforme.

I.C - Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général $a_n = u_n - 1$ converge absolument et on pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k .$$

En considérant la série de terme général $(\ln P_{n+1} - \ln P_n)$, montrer que la suite (P_n) converge vers un réel strictement positif.

I.D - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que la série de fonctions de terme général $\psi_n = \phi_n - 1$ converge normalement sur I. On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n} \phi_k .$$

Montrer que la suite de fonctions $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie II - Conjugaison d'éléments de $\mathcal{E}$ localement contractants

Soient λ dans $]0, 1[$ et f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}_\lambda$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f^n}{\lambda^n}.$$

Soit enfin h_λ l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], h_\lambda(x) = \lambda x.$$

II.A - Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n \circ f - h_\lambda \circ u_{n+1}$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon < 1$ et $(\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda$.

II.B.2) Montrer qu'il existe a dans $]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [0, a], f(x) \le (\lambda + \varepsilon)x.$$

II.C -

II.C.1) Montrer qu'il existe $C \ge 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - \lambda x| \le Cx^2.$$

II.C.2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \ge n_0, \forall x \in [0, 1], f^n(x) \in [0, a].$$

II.C.3) Pour $n \ge n_0$ et $x \in [0, 1]$, majorer $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$ et prouver que la suite de fonctions $(u_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Sa limite sera notée u.

II.D -

II.D.1) Montrer que la série de fonctions de terme général

$$\frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 \text{ converge normalement sur } [0, 1].$$

II.D.2) En déduire que u est un C^1-difféomorphisme de $[0, 1]$ sur son image.

II.E - Conclure que $([0, 1], f)$ et $([0, 1], h_\lambda)$ sont conjugués.

Partie III - Conjugaison des éléments de ε tangents à l'identité

On note ε_1^* l'ensemble des éléments (I, f) de ε_1 tels que l'ensemble $\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$ soit non vide. Pour (I, f) dans ε_1^*, on note $\nu(f) = \min\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - ax^{\nu(f)+1} + o(x^{\nu(f)+1}) \text{ avec } a = \frac{-f^{(\nu(f)+1)}(0)}{(\nu(f)+1)\,!}.$$

III.A -

III.A.1) Pour q dans $\mathbb{N}^*$, soit θ_q la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1],\ \theta_q(x) = \frac{x}{(1+x^q)^{1/q}}.$$

Montrer que $([0, 1], \theta_q)$ est dans ε_1^*, préciser $\nu(\theta_q)$.

Dans la suite de III.A, on considère une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $([0, 1], f)$ appartienne à ε_1^* et on pose $q = \nu(f)$ puis :

$$a = -\frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)\,!}.$$

III.A.2)

a) Vérifier que a est strictement positif.

b) Si (I, g) appartient à ε et est conjugué à $([0, 1], f)$, vérifier que (I, g) est aussi dans ε_1^* avec $\nu(g) = q$.

III.A.3) Dans ce III.A.3, on suppose qu'il existe k dans $\{2, 3, \ldots, q\}$ et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + o(x^{q+k}).$$

Soit β un nombre réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = x + \beta x^k.$$

a) Montrer qu'il existe r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que h induise un C^1-difféomorphisme de $[0, r]$ sur $[0, r']$.

Dans la suite de III.A.3, les réels r et r' sont ainsi choisis et on note h^{-1} le difféomorphisme réciproque de la restriction de h à $[0, r]$.

b) Établir :quand $y \to 0$, $h^{-1}(y) = y - \beta y^k + o(y^k)$.

c) Déterminer les développements limités à l'ordre $q+k$ en 0 de $x \mapsto h \circ f(x)$ puis de $y \mapsto h \circ f \circ h^{-1}(y)$.

III.A.4) De ce qui précède déduire l'existence d'un réel E et d'un couple (I, g) de ε_1^* conjugué à $([0, 1], f)$ et tels que :

$$\text{quand } y \to 0,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1}).$$

III.B - Dans cette section III.B, q est un entier strictement positif, E est un nombre réel et g une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], g)$ appartienne à ε_1^* et que :

$$\text{quand } y \to 0,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1}).$$

On définit une application τ_q sur $]0, 1]$ par :

$$\forall y \in]0, 1],\ \tau_q(y) = \frac{1}{y^q}.$$

Donc τ_q est un C^1-difféomorphisme de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$; on ne demande pas de le vérifier. Soit enfin $G = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}$.

III.B.1)

a) Identifier $T_q = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1}$.

b) Quelles propriétés de G déduit-on des propriétés ii) et iii) du début de l'énoncé ?

c) Déterminer un nombre réel R tel que :

$$\text{quand } x \to +\infty,\ G(x) = x + 1 + \frac{R}{x} + O\left(\frac{1}{x^{1+1/q}}\right).$$

III.B.2)

a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ G^n(x) \geq x + \frac{n}{2}.$$

Pour tous n entier naturel et x réel supérieur ou égal à 1, on pose :

$$u_n(x) = G^n(x) - n.$$

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{C}{n}.$$

En déduire que pour tout $X \geq 1$ il existe un réel strictement positif K tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ \forall x \in [1, X], \ |u_n(x)| \leq K \ln n .$$

c) Pour tous n entier naturel strictement positif et x réel supérieur ou égal à 1, on pose : $v_n(x) = u_n(x) - R \ln n$, où R est la constante définie au III.B.1-c). Démontrer, en procédant comme au II.C.3), que la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers une fonction v et que cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

d) Si $x \geq 1$, vérifier que $v \circ G(x) = v(x) + 1$.

III.B.3)

a) Montrer que :

$$\text{quand } x \to +\infty, \ G'(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ et, en procédant comme en II.D.1), prouver que v est un C^1-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur son image.

III.B.4)

a) Montrer que $v'(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$.

b) Conclure, si f est une fonction de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ soit dans ε_1^* et $\nu(f) = q$, que $([0, 1], f)$ est conjugué à $([0, 1], \theta_q)$.

III.C - Soit $(w_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$w_0 = \frac{\pi}{8} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+1} = \operatorname{sh}(\sin(w_n)) .$$

III.C.1)

a) Utiliser ce qui précède pour montrer que w_n admet un équivalent du type $\dfrac{a}{n^\alpha}$ avec a et α réels. Déterminer α.

b) Montrer qu'il existe des nombres réels b et c tels que :

$$w_n = \frac{a}{n^\alpha} + \frac{b}{n^{3\alpha}} + c\,\frac{\ln n}{n^{5\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right).$$

III.C.2) Établir un programme permettant de calculer a, b, c (on utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel).

••• FIN •••
