

Du silicium à la commande des machines thermiques

Partie I – Obtention du silicium

I.A - Obtention de silicium de qualité métallique

I.A.1) Approximation d'Ellingham : $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont supposées constantes sur les intervalles de température où il n'y a pas de changement de phase.

$\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$ est une fonction affine par morceaux.

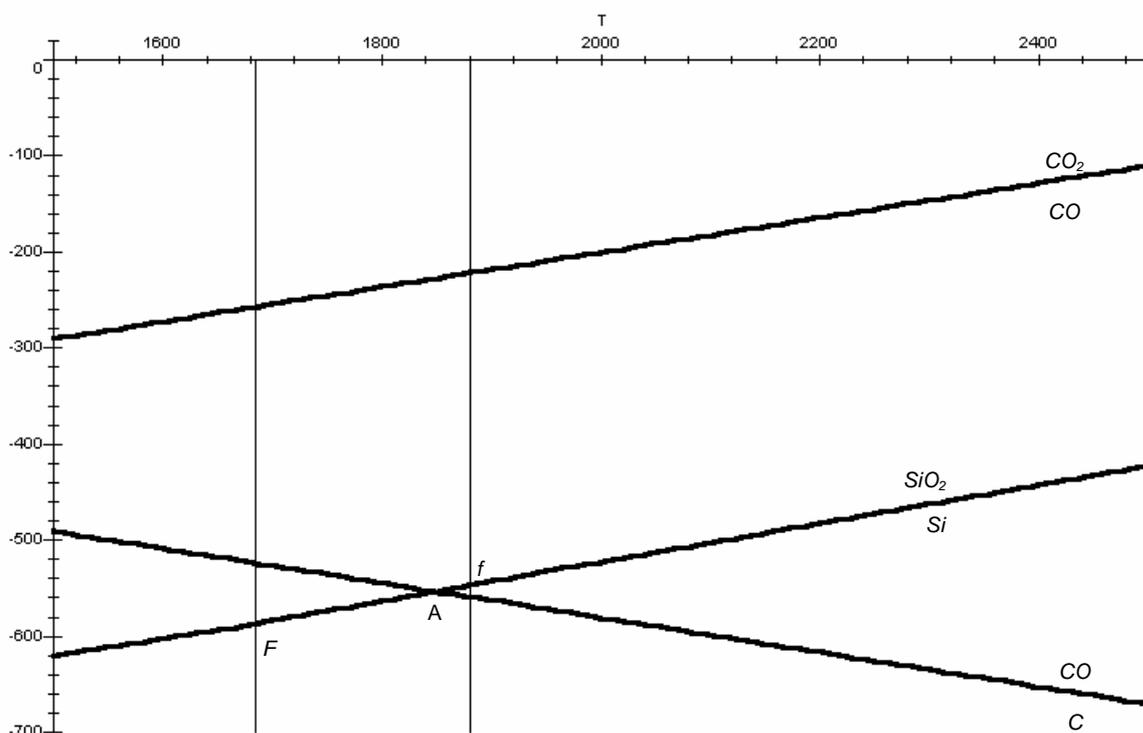
I.A.2) Couple CO_2/CO , réaction $2 CO + O_2 = 2 CO_2$: $\Delta_r G^\circ(T) = - 560 + 0,18.T \text{ kJ.mol}^{-1}$

Couple CO/C , réaction $2 C + O_2 = 2 CO$: $\Delta_r G^\circ(T) = - 220 - 0,18.T \text{ kJ.mol}^{-1}$

Couple SiO_2/Si , réaction $Si + O_2 = SiO_2$: $1500 K \triangleleft T \triangleleft 1685 K$, $\Delta_r G^\circ(T) = - 890 + 0,18.T \text{ kJ.mol}^{-1}$

$1685 K \triangleleft T \triangleleft 1880 K$, $\Delta_r G^\circ(T) = - 890 - 40 + (0,18 + \frac{40\,000}{1685}).T = - 930 + 0,204.T \text{ kJ.mol}^{-1}$

$1880 K \triangleleft T \triangleleft 2500 K$, $\Delta_r G^\circ(T) = - 930 + 10 + (0,204 - \frac{10\,000}{1880}).T = - 920 + 0,199.T \text{ kJ.mol}^{-1}$



I.A.3) a) La réaction $SiO_{2(s)} + 2 C_{(s)} = Si + 2 CO_{(g)}$ fait intervenir du gaz. En l'absence de donnée sur la pression partielle en monoxyde de carbone, on ne peut pas calculer précisément l'affinité chimique. Il est cependant possible d'avoir une idée de la température à partir de laquelle la réaction a lieu en étudiant le signe de $\Delta_r G^\circ(T)$. On peut dire qu'approximativement, la réaction a lieu pour T telle que $\Delta_r G^\circ(T) < 0$.

$\Delta_r G^\circ_{CO/C} < \Delta_r G^\circ_{SiO_2/Si}$. Graphiquement, cela correspond à des températures supérieures à celle du point A d'intersection des deux courbes (voir schéma précédent).

$T_0 = 1850 K$ A cette température, le silicium obtenu est liquide.

b) Le gaz formé est du monoxyde de carbone CO .

Pour produire $m = 1$ tonne de silicium, soit m/M_{Si} mol, on crée $2m/M_{Si}$ mol de CO . En supposant ce gaz parfait, son volume à la température T_0 est $V = 2mRT_0/PM_{Si}$. A.N. $V = 11\,000 m^3$

Il faut pour cela utiliser une masse de silice égale à mM_{SiO_2}/M_{Si} et une masse de coke égale à mM_C/M_{Si} .

A.N. $m_{SiO_2} = 2,14$ tonnes. $m_C = 854$ kg

I.B - Obtention de silicium de qualité électronique

I.B.1) On remarque dans le tableau de données : $SiCl_4 : T_{\text{ébullition}} = 330 K$

$SiHCl_3 : T_{\text{ébullition}} = 460 K$

$FeCl_3 : T_{\text{ébullition}} = 590 K$

$AlCl_3 : T_{\text{sublimation}} = 460 K$

A $580 K$, on peut éventuellement trouver sous forme gazeuse (sous réserve de faisabilité thermodynamique et cinétique) : $SiCl_4$, $SiHCl_3$ et $AlCl_3$.

I.B.2) A $350 K$, seuls les composés contenant du silicium, $SiCl_4$ et $SiHCl_3$ sont sous forme gazeuse. On a ainsi pu séparer le silicium de ses impuretés.



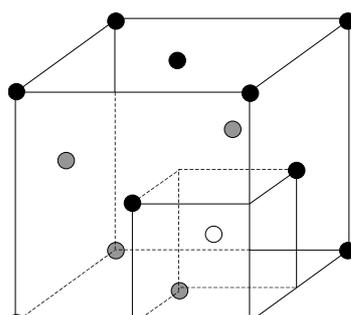
a) A $1300 K$, $\Delta_r G^\circ = 25 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $K^\circ = \exp(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}) = 9,9 \cdot 10^{-2}$

b)	$SiHCl_{3(g)}$	+	$H_{2(g)}$	=	$Si_{(s)}$	+	$3 HCl_{(g)}$	total gaz
initialement	1		1		0		0	2
finalemt	$1 - \alpha$		$1 - \alpha$		α		3α	$2 + \alpha$

$$K^\circ = \frac{P_{HCl}^3}{P_{H_2} P_{SiHCl_3} P^\circ} = \frac{(3\alpha)^3 P}{(1-\alpha)^2 (2+\alpha) P^\circ} = \frac{(3\alpha)^3}{(1-\alpha)^2 (2+\alpha)} \quad \text{La résolution numérique donne } \alpha = 0,17.$$

c) La réaction étant endothermique ($\Delta_r H^\circ = 220 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} > 0$), une augmentation de température est favorable à la production de silicium.

I.B.3)



Sur le schéma sont représentés les atomes de silicium du système cubique à face centrée et un atome occupant un site tétraédrique.

a) Un atome de silicium au centre d'un petit cube de côté $a/2$ a 4 plus proches voisins. Coordinence 4.

b) Il y a 8 atomes par maille (8 sommets appartenant à 8 mailles, 6 faces appartenant à 2 mailles et 4 sites T occupés).

c) Il y a contact des atomes le long d'une grande diagonale d'un petit cube : $4r_{Si} = \sqrt{3}a/2$. $r_{Si} = \alpha\sqrt{3}/8$

$$d) \text{ Compacité } C : C = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_{Si}^3}{a^3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

$$e) a = (8M/N\rho)^{1/3} \quad \text{A.N. : } a = 543 \text{ pm} \quad r_{Si} = 118 \text{ pm}$$

Partie II – Diode

II.A – Semi-conducteurs

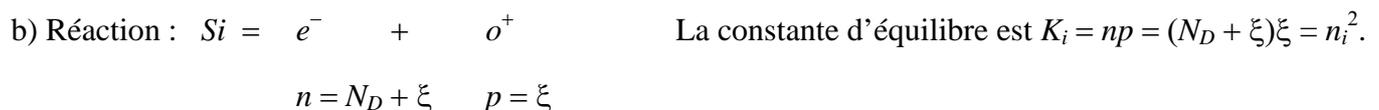
II.A.1) *Silicium intrinsèque*. A l'équilibre, $n_i = p_i = \sqrt{K_i} = 1,2 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.

Dans le cuivre (métal), chaque atome libère un électron de conduction : $n = \mu N/M = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. $n \gg n_i$, le cuivre est un bien meilleur conducteur que le silicium.

II.A.2) *Silicium dopé N*.



Dans le réseau cristallin, le silicium est tétravalent (coordination 4). Les quatre électrons de valence ($3s^2 3p^2$) sont impliqués dans des liaisons covalentes. L'arsenic n'implique que 4 de ces 5 électrons de valence ($4s^2 4p^3$) pour s'intégrer à ce réseau. Il reste donc un électron disponible pour la conduction.



On voit donc que ξ est inférieur à n_i . Comme par ailleurs $N_D \gg n_i$, $N_D \gg \xi$ et $n \ll N_D$ et $p \ll n_i^2/N_D$.

II.A.3) *Silicium dopé P*.

a) B : $1s^2 2s^2 2p^6 \underline{3s^2 3p^1}$ Le bore a besoin d'un quatrième électron de valence pour créer quatre liaisons covalentes. Il est accepteur d'électrons.

b) Cf II.A.2) b)

II.B – Jonction PN non polarisée

II.B.1) Charge volumique $\rho(x)$.

a) Dans la zone de déplétion, neutre avant la diffusion des électrons venant de la zone 1, il y a une densité volumique de trous N_A . Les électrons diffusent et après diffusion, n et p sont très inférieurs à N_A . La quasi-totalité des trous ont donc été comblés par des électrons (chargés $-e$) provenant de la zone 1 : la zone 2 n'est donc plus neutre, elle possède une charge volumique $\rho = -N_A e$.

b) La neutralité de la jonction impose $\rho x_0 + \sigma = 0$. Par conséquent, $\sigma = N_A e x_0$. Physiquement, les électrons qui ont diffusés proviennent de la zone 1 qui se charge positivement sur une certaine épaisseur de la jonction. Comme $N_D \gg N_A$, cette épaisseur est bien plus mince que x_0 . On considère donc que cette charge positive est surfacique.

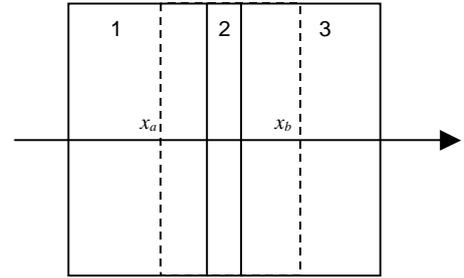
II.B.2) Champ électrique $E(x)$.

a) La jonction est unidimensionnelle. Toutes les grandeurs ne dépendent donc que du paramètre de position x . Ainsi le potentiel dont dérive le champ \vec{E} s'écrit $V(x)$. Par conséquent, $\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V = E(x) \vec{u}_x$.

b) L'équation de Maxwell-Gauss dans le milieu de permittivité diélectrique ϵ s'écrit $\text{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$, ce qui donne $dE/dx = \rho/\epsilon$.

II.B.3) Potentiel électrique $V(x)$. $\partial V/\partial x = -E$.

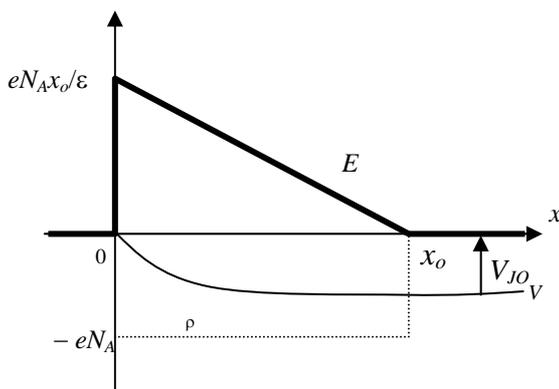
II.B.4) a) Appliquons le théorème de Gauss. La surface de Gauss choisie est un cylindre d'axe Ox délimité par deux sections perpendiculaires à cet axe situées dans les plans $x = x_a$ ($x_{-1} < x_a < 0$) et $x = x_b$ ($0 < x_b < x_1$).



$$\oiint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = S(E_{\text{zone 3}} - E_{\text{zone 1}}) = Q_{\text{int}}$$

La charge intérieure étant nulle, E est nul dans la zone 3.

b) Dans la zone 1, $x < 0$, $E = 0$, $V = 0$.



A la traversée de la surface chargée (en $x = 0$), le champ électrique est discontinu $E(0^+) - E(0^-) = \sigma/\epsilon$, donc $E(0^+) = eN_A x_0/\epsilon$.

Dans la zone 2, $dV/dx = \rho/\epsilon$ s'intègre en $E = E(0^+) + \rho x/\epsilon = eN_A(x_0 - x)/\epsilon$.

Le potentiel est continu en $x = 0$, par conséquent, $V(x) = [(x_0 - x)^2 - x_0^2]eN_A/2\epsilon$.

Dans la zone 3, $E = 0$, $V = -x_0^2 eN_A/2\epsilon$.

D'où les graphes ci-contre.

II.C – Diode polarisée

II.C.1) Le vecteur densité de courants électriques de conduction est $\vec{j}_c = \rho \vec{v} = -ne(-\eta \vec{E})$.

II.C.2) Le vecteur densité de courants électriques de diffusion est $\vec{j}_d = -D \overrightarrow{\text{grad}} \rho = eD \frac{dn}{dx} \vec{u}_x$.

II.C.3) Zones 1 et 3

a) E y est nul, $\vec{j}_t = \vec{j}_d$. En régime permanent, \vec{j}_t est à flux conservatif et ne dépend donc pas de x (ni du temps d'ailleurs, il est constant). La relation $j_t = eD \frac{dn}{dx}$ prouve que $n(x)$ suit une loi affine.

b) Par intégration de la relation précédente, $\Delta n = \frac{j_t d}{eD}$.

c) A.N. : $|\Delta n| = 8,9 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$

Dans la zone 1, $|\Delta n| \ll N_D$, donc $n(x)$ est à peu près constante et égale à N_D .

Dans la zone 3, il faut comparer $|\Delta n|$ à $\frac{n_i^2}{N_A}$ qui vaut $1,4 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$. La variation de n de x_0 à x_1 n'est donc pas du tout négligeable devant $\frac{n_i^2}{N_A}$, $n(x)$ ne peut pas être considérée comme uniforme.

d) $n(0) = N_D + \Delta n \ll N_D$ $n(x_0) = \frac{n_i^2}{N_A} - \Delta n \ll -\Delta n$

II.C.4) Zone 2

a) Les relations $j_d = eD \frac{dn}{dx}$ et $dV/dx = -E$ montrent que des discontinuités de n ou de V correspondraient à des valeurs infinies de j_d et de E , ce qui n'est pas physiquement plausible.

b) Avec $|j_d| \gg |j_t|$, $j_d \ll -j_c$, d'où l'équation différentielle : $eD \frac{dn}{dx} + ne\eta \frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Après séparation des variables, on obtient bien $n(x) = A \exp(\eta V(x)/D)$. Avec, $V(0) = 0$, on peut écrire, en posant $V_T = D/\eta$, $n(x) = n(0) \exp(V(x)/V_T)$.

II.C.5) Caractéristique courant-tension :

a) Comme V est uniforme dans les zones 1 et 3, $V_J = V(0) - V(x_0) = -V(x_0)$. Par conséquent, en utilisant la relation précédente, $n(x_0) = n(0) \exp(-V_J/V_T)$.

En remplaçant $n(x_0)$ et $n(0)$ par leurs valeurs (II.C.3 d), il vient $\frac{n_i^2}{N_A} - \Delta n = (N_D + \Delta n) \exp(-V_J/V_T)$.

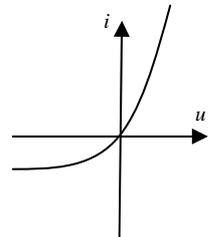
Pour $\Delta n = 0$, V_J prend la valeur $V_{J0} = V_T \ln(N_A N_D / n_i^2)$.

b) Dans la zone 3, $j_t = eD \Delta n/d$. Δn peut être extrait de la relation $\frac{n_i^2}{N_A} - \Delta n = (N_D + \Delta n) \exp(-V_J/V_T)$, en se souvenant que $N_D \gg |\Delta n|$: $\Delta n = -N_D \exp(-V_J/V_T) + \frac{n_i^2}{N_A}$. Pour $\Delta n = 0$, $-N_D \exp(-V_{J0}/V_T) + \frac{n_i^2}{N_A} = 0$, d'où $\Delta n = \frac{n_i^2}{N_A} [1 - \exp(-\frac{V_J - V_{J0}}{V_T})]$ et $j_t = \frac{eD n_i^2}{d N_A} [1 - \exp(-\frac{u}{V_T})]$.

Le régime étant permanent, j_t est uniforme dans la diode et j_t est le même dans les autres zones.

c) Application numérique : $V_{J0} = 0,68 \text{ V}$ $i = -S j_t$ $i(-0,1 \text{ V}) = -7,7 \text{ nA}$
 $i(0,6 \text{ V}) = 208 \text{ A}$

Cette dernière valeur du courant est très importante, il s'agit, avec une telle section, d'une diode de puissance.



Caractéristique de la diode :

Partie III – Machine asynchrone

III.A – Question préliminaire - Théorème de Ferraris

III.A.1) On peut avec Maple, représenter un vecteur par la commande `vector`.

Pour le vecteur \vec{u}_{x2} dans le cas $p = 3$: `ux2 := vector(2, [cos(4*Pi/3), sin(4*Pi/3)]) ;`

III.A.2) `u := (k, p) -> vector(2, [cos(2*Pi*k/p), sin(2*Pi*k/p)]) ;`

III.A.3) `s := p -> sum(cos(omega*t - 2*Pi*k/p) * u(k, p), k=0..p-1) ;`

III.A.4) `s(12)` doit renvoyer la représentation de $6\vec{u}_d$.

D'ailleurs `evalm(expand(s(12))) ;` renvoie `[6cos(Ωt), 6sin(Ωt)]`.

III.B – Stator

$$\text{III.B.1) } \vec{B}_k = B_0 \exp(j\omega_s t - j2\pi k/m) \vec{u}_{xk}$$

III.B.2) D'après le théorème de Ferraris, $\vec{B} = \frac{mB_0}{2} \vec{u}_d$, avec $\vec{u}_d = \cos(\omega_s t) \vec{u}_x + \sin(\omega_s t) \vec{u}_y$. On obtient donc un champ tournant à la vitesse ω_s , de module $mB_0/2$ et dirigé à $t = 0$ selon \vec{u}_x .

III.C – Machine asynchrone

III.C.1) Dans le référentiel du rotor, le champ tourne à la vitesse $\omega_s - \omega = \omega_r$.

III.C.2) Le flux Φ du champ magnétique à travers la spire varie : il apparaît une fem induite $e = -d\Phi/dt$.

$$\Phi = \vec{B} \cdot S \vec{u}'_{x0} = \frac{mB_0}{2} S \vec{u}_d \cdot \vec{u}'_{x0} = \frac{mB_0}{2} S \cos(\omega_r t)$$

Travaillons avec les amplitudes complexes pour ce régime sinusoïdal permanent de pulsation ω_r :

$$\underline{\Phi} = \frac{mB_0}{2} S \quad \underline{e} = -j\omega_r \frac{mB_0}{2} S$$

La loi de la maille donne : $\underline{e} = R \underline{i}_0 + jL\omega_r \underline{i}_0$ d'où $\underline{i}_0 = -j\omega_r \frac{mB_0}{2} S \frac{1}{R + jL\omega_r}$

III.C.3) La spire (k, k') est spatialement déphasée de π/n . $\underline{i}_k = \underline{i}_0 \exp(-j\pi k/n)$.

Il semble cependant qu'il y ait une erreur dans l'énoncé, puisque pour pouvoir appliquer ensuite le théorème de Ferraris assez facilement, il faudrait que ce déphasage spatial soit en fait égal à $2\pi/n$. Le paramètre n désigne donc probablement le nombre de barreaux de la cage et non le nombre de spires. Le déphasage spatial vaut alors $2\pi/n$. Le courant dans la spire (k, k') est alors égal à $\underline{i}_k = \underline{i}_0 \exp(-j2\pi k/n)$.

III.C.4) Si l'énoncé comporte une erreur,

$$\vec{M}_k = S \underline{i}_k \vec{u}'_{xk} = -S j\omega_r \frac{mB_0}{2} S \frac{1}{R + jL\omega_r} \exp(-j2\pi k/n) \vec{u}'_{xk} = S | \underline{i}_0 | \exp(-j\pi/2 - j\psi - j2\pi k/n) \vec{u}'_{xk}$$

En revenant à la notation réelle, $\vec{M}_k = S | \underline{i}_0 | \cos(\omega_r t - \pi/2 - \psi - 2\pi k/n) \vec{u}'_{xk} = S | \underline{i}_0 | \cos(\omega_r t' - 2\pi k/n) \vec{u}'_{xk}$

III.C.5) $\vec{M} = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{M}_k$ En utilisant le théorème de Ferraris, on obtient immédiatement $\vec{M} = S | \underline{i}_0 | n/2 \vec{u}'_d$, en notant \vec{u}'_d le vecteur $\cos(\omega_r t') \vec{u}'_x + \sin(\omega_r t') \vec{u}'_y$.

Si l'énoncé ne comporte pas d'erreur, le résultat est identique, même si la solution est un peu plus délicate à établir : on cherche $I = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk}$.

Si l'on calcule $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk} + \sum_{k=n}^{2n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk}$, on obtient d'une part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk} + \sum_{k=n}^{2n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk} = \sum_{k=0}^{2n-1} \cos\left(\omega_r t' - 2\pi \frac{k}{2n}\right) \vec{u}'_{xk} = n \vec{u}'_d$$

par le théorème de Ferraris, et d'autre part $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk} + \sum_{k=n}^{2n-1} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) \vec{u}'_{xk} = 2I$ car

$$\begin{cases} \cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k}{n}\right) = -\cos\left(\omega_r t' - \pi \frac{k-n}{n}\right) \\ \vec{u}'_{xk} = -\vec{u}'_{x(k-n)} \end{cases} \quad \text{On en déduit donc } I = \frac{n}{2} \vec{u}'_d.$$

Le moment tourne donc à la vitesse ω_r dans le référentiel lié à la cage, soit à la vitesse $\omega_r + \omega = \omega_s$ dans le référentiel du stator. Il tourne à la même vitesse que le champ, avec un retard de phase égal à $\pi/2 + \psi$.

$$|\vec{M}| = S |\dot{i}_0| n/2, \text{ avec } |\dot{i}_0| = \frac{mB_0}{2L} S \left| \frac{L\omega_r}{R + jL\omega_r} \right| = \frac{mB_0}{2L} S \sin\psi. \text{ Finalement, } |\vec{M}| = aI_0 S \sin\psi.$$

a est sans dimension.

III.D – Couple

$$\text{III.D.1) } \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = aI_0 S \sin\psi \frac{mB_0}{2} \sin(\pi/2 + \psi) \vec{u}_z = K(I_0 \sin\psi)(I_0 \cos\psi) \vec{u}_z \text{ en posant } K = 2a^2 L/n.$$

III.D.2) M varie en $I_0 \sin\psi$ qui correspond donc au courant induit. L'autre peut donc être identifié au courant inducteur.

III.E – Puissance

$$\text{III.E.1) } P_M = \Gamma \omega = K \omega I_0^2 \sin\psi \cos\psi$$

III.E.2) P_J correspond à la puissance dissipée par effet Joule dans les résistances des spires du rotor :

$$P_J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} R |\dot{i}_k|^2 = n \frac{1}{2} R \left[\frac{mk_B I_0}{2L} S \sin\psi \right]^2$$

Avec $\tan\psi = L\omega_r/R$, on obtient $P_J = \Gamma \omega_r$.

$$\text{III.E.3) } P = P_M + P_J = \Gamma \omega_s$$

$$\text{III.E.4) } P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2} \text{Re}(U_k I_k^*) = m U_0 I_0 \cos\theta / 2$$

III.F – Contrôle du couple

III.F.1) a) $\Gamma/I_0 = mU_0 \cos\theta / 2\omega_s = \text{constante} = KI_0 \sin(2\psi) / 2$ Γ , I_0 et $1/\sin(2\psi)$ sont donc proportionnels.

b) Au démarrage, le rotor accélère, ω_r diminue donc $\psi = \arctan(L\omega_r/R)$ diminue. ψ étant inférieur à $\pi/4$, $\sin(2\psi)$ diminue, $1/\sin(2\psi)$, Γ et I_0 augmentent.

c) ψ reste constant, ω augmente donc ω_s aussi.

$$\text{III.F.2) Avec } \Gamma_N = mU_{0N} I_{0N} \cos\theta / 2\omega_s, \quad \omega_s = \frac{mU_{0N} I_{0N}}{2\Gamma_N} \cos\theta, \text{ soit } \omega_0 = \frac{mU_{0N} I_{0N}}{2\Gamma_N}$$

$$\text{III.F.3) On peut proposer : } I_0^2 = \frac{2}{3} (I_0^2(t) + I_1^2(t) + I_2^2(t)); \quad \cos\varphi = \frac{I_0(t)}{I_0}; \quad \sin\varphi = \frac{2I_2(t) - \sqrt{3}I_1(t)}{I_0}$$

III.G – Application à la traction ferroviaire

III.G.1) Le théorème de la puissance cinétique appliqué au train donne (en l'absence de dissipation) :

$$Mv \frac{dv}{dt} = N \Gamma_N \omega$$

La vitesse angulaire des moteurs est proportionnelle à la vitesse du train : $\frac{\omega}{v} = \frac{P_N}{\Gamma_N V_N}$, d'où la relation :

$$v(t) = \frac{NP_N t}{MV_N}$$

III.G.2) Avec $P = mU_0 I_0 \cos\theta/2$, $I_{0N} = \sqrt{2P_N/U_{Neff}} \cos(\theta_N) = 267 \text{ A}$ $\frac{dv}{dt} = \frac{NP_N}{MV_N} = 0,185 \text{ m.s}^{-2}$

$$T = \frac{MV_N^2}{NP_N} = 450 \text{ s} = 7'30'' \quad \delta = \frac{V_N T}{2} = 18,7 \text{ km.}$$