

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°4 du 01-12-2009

— Durée : 4 heures. Solutions —

Problème n° 1 – Principe de la conductimétrie

Centrale MP 2004

A. Déplacement d'un ion en solution

Mise en mouvement d'un ion

1. L'équation différentielle est : $m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = q_k \mathbf{E} - 6\pi\eta r_{Hk} \mathbf{v}_k$. Le champ électrique étant uniforme, la solution est : $\mathbf{v}_k = \frac{q_k E}{6\pi\eta r_{Hk}} \mathbf{e}_x (1 - \exp -\frac{t}{\tau_k})$ avec $\tau_k = \frac{m_k}{6\pi\eta r_{Hk}}$.

2. La vitesse limite est : $\mathbf{v}_k = \frac{q_k E}{6\pi\eta r_{Hk}} \mathbf{e}_x$. On peut en tirer la mobilité : $u_k = \frac{q_k}{6\pi\eta r_{Hk}}$ et $u_k = \frac{q_k}{m_k} \tau_k$.

3. On trouve pour le sodium : $\tau_{\text{Na}} = 1,24 \times 10^{-14}$ s.

4. La distance parcourue peut s'évaluer en faisant simplement le produit de la vitesse limite par le temps caractéristique : $d_k = u_k E \tau_k = \frac{q_k}{m_k} \tau_k^2 E = 6 \times 10^{-22}$ m.

Confrontation à l'expérience pour des ions métalliques

5. Structures électroniques : $\text{Li}^+ : 1s^2$, $\text{Na}^+ : 1s^2 2s^2 2p^6$ et $\text{K}^+ : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Ces éléments appartiennent à la première colonne de la classification périodique, ce sont les métaux alcalins. Les rayons ioniques sont croissants dans la colonne avec le numéro atomique Z .

6. On a donc :

	Li^+	Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
rayon ionique en pm	59	102	138	149	167

7. On a vu que la mobilité évoluait en $\frac{1}{r_{Hk}}$. On peut voir que de l'ion Li^+ à l'ion Cs^+ la mobilité est multipliée par 2. Cela signifie que le rayon hydrodynamique est multiplié par 2. Or le rayon ionique augmente avec Z , ainsi r_{Hk} n'est pas proportionnel à r_{Ik} .

8. L'atome le plus électronégatif est dans la molécule d'eau est l'atome d'oxygène, c'est donc lui qui va attirer les électrons de la liaison avec l'atome d'hydrogène. Le moment dipolaire est orienté par convention du + vers le - donc ici de l'atome d'oxygène vers l'atome d'hydrogène. Dans leur positionnement par rapport aux cations, ce sont les atomes d'oxygène qui vont être à côté des cations.

9. Dans un problème à symétrie sphérique le champ électrique varie comme $\frac{1}{r^2}$. Il est donc beaucoup plus intense pour les ions de petite taille que pour les gros.

10. Les forces de cohésion de l'ion hydraté sont plus fortes dans le cas des petits cations. Sur le gros cations, la plus faible interaction entre les molécules d'eau et le cation permet plus de mobilité des molécules d'eau et le remplacement d'une molécule d'eau par une autre au cours du déplacement du cation. La mobilité du cation hydraté de grande taille est donc plus grande et par conséquent le rayon hydrodynamique plus faible puisque la signification physique de ce rayon est de traduire la plus grande difficulté de déplacement.

Conductance d'une solution ionique

11. Par définition de la densité volumique de courant, on a $\mathbf{j} = \sum_k \rho_k \mathbf{v}_k$. La densité volumique de charge est $\rho_k = z_k q c_k \mathcal{N}_A$ à condition de traduire la concentration en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$. La vitesse limite est assimilée à u_k^0 . Comme cette dernière est définie positivement, on a $u_k = \frac{|z_k|}{z_k} u_k^0$. Ainsi, la densité de courant s'exprime par : $\mathbf{j} = \sum_k z_k q c_k \mathcal{N}_A \frac{|z_k|}{z_k} u_k^0 \mathbf{E}$. La conductivité de la solution est γ telle que $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$. À partir des calculs précédents, on trouve bien l'expression proposée par l'énoncé à condition de prendre : $\lambda_k^0 = q \mathcal{N}_A u_k^0$.

B. Résistance d'une cellule de mesure

12. La concentration est $c = 10 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$. On trouve : $\gamma = 0,15 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

13. Le potentiel obéit à l'équation locale de LAPLACE qui est $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. La solution étant considérée comme localement neutre en tout point, on aura : $\Delta V = 0$.

14. Les lignes de courant sont parallèles à \mathbf{E} donc perpendiculaires aux équipotentielles.

Cellule à électrodes planes parallèles

15. La situation étudiée est unidimensionnelle de coordonnée x . L'équation vérifiée par le potentiel est $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$. Le potentiel est une fonction affine de x et compte tenu des conditions aux limites, on obtient : $V = \frac{U_0}{a} x$. Le champ électrique est uniforme donné par : $\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{e}_x = -\frac{U_0}{a} \mathbf{e}_x$.

16. On a $\mathbf{j} = -\frac{\gamma U_0}{a} \mathbf{e}_x$ d'où : $i = jS = \frac{\gamma U_0 S}{a}$.

17. La résistance est alors : $R_{cell} = \frac{U_0}{i} = \frac{1}{\gamma} \frac{a}{S}$.

18. On trouve : $R_{cell} = 667 \Omega$.

C. Réponse d'une cellule à un échelon de tension : modèle de Helmholtz

19. Le potentiel ne dépend toujours que de x , ainsi $\mathbf{E} = -\frac{dV}{dx} \mathbf{e}_x$ reste valable. En observant le graphique de la figure 4, on voit que le champ électrique est plus élevé entre les plans PHE et les électrodes qu'entre les deux plans PHE (en valeur absolue).

20. Le cours nous a montré que : $\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{n}_{12}$ où \mathbf{n}_{12} est la normale à la surface de séparation orientée du milieu 1 vers le milieu 2.

21. Le plus simple, ici, est sans doute de considérer la superposition de deux condensateurs plans constitués par les couples $(-\sigma, \sigma)$ et $(-\sigma_1, \sigma_1)$. Par application du théorème de superposition, on obtient le champ total. Entre les deux électrodes, le couple $(-\sigma, \sigma)$ crée un champ électrique $\mathbf{E}' = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{e}_x$. Entre les deux plans PHE, le couple $(-\sigma_1, \sigma_1)$ crée le champ $\mathbf{E}'' = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{e}_x$ et en dehors le champ créé est nul. Par conséquent, on a entre les deux plans PHE : $\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{e}_x$ et entre chaque plan PHE et son électrode voisine : $\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{e}_x$.

22. Pour relier les charges surfaciques au potentiel, il suffit d'écrire que la circulation du champ électrique entre les deux électrodes est $U_0 : U_0 = \int_{a/2}^{-a/2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \mathbf{e}_x$. On trouve après calcul que : $U_0 = \frac{\sigma a - \sigma_1 (a - 2e)}{\epsilon_0 \epsilon_r}$.

23. La définition de l'intensité est : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} S$. En utilisant la densité volumique de courant et la loi d'OHM, on arrive à $\frac{d\sigma_1}{dt} S = -\gamma E_{x < (a/2 - e)} S$. Cela nous permet d'écrire que : $\frac{d\sigma_1}{dt} = -\gamma \frac{\sigma_1 - \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. En utilisant l'expression de U_0 de la question précédente, on arrive à : $\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{2\gamma e}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma_1 = \frac{\gamma U_0}{a}$. Le temps caractéristique est : $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a}{2\gamma e}$.

24. Le modèle de la cellule est celui d'un condensateur C_{dc} , d'une résistance R_{cell} et d'un nouveau condensateur C_{dc} mis en série. Tout se passe comme si on avait affaire à une résistance R_{cell} mise en série avec un condensateur de capacité $C_{dc}/2$ équivalent aux deux précédents. La constante de temps est donc $R_{cell} C_{dc}/2$ qu'on identifie à $\tau = \frac{R_{cell} C_{dc}}{2}$. On trouve alors : $C_{dc} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e}$. Ce résultat était prévisible puisqu'on a étudié une situation unidimensionnelle, les condensateurs formés entre les électrodes et les plans PHE sont bien assimilables à des condensateurs plans.

25. On a : $C_{dc} = 73 \mu\text{F}$. Cette valeur est un peu plus grande que celles que l'on rencontre en TP habituellement puisqu'on travaille souvent pour $1 \text{ nF} \leq C \leq 1 \mu\text{F}$.

D. Accumulation des charges au voisinage d'une électrode

Modèle de Gouy et Chapman

26. On a : $\rho = qc_+ - qc_- = -2qc_0 \text{sh} \frac{qV}{k_B T}$.

27. C'est toujours l'équation de LAPLACE : $\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{2qc_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{sh} \frac{qV}{k_B T}$.

28. Pour intégrer cette équation, il faut penser à multiplier chaque membre par $\frac{dV}{dx}$. La primitive de la fonction cosinus hyperbolique étant un cosinus hyperbolique, on trouve la réponse proposée à condition de tenir des conditions aux limites en $x = 0$. On a $V_{x=0} = 0$ et $E_{x=0} = 0$. Ainsi, on arrive à : $\frac{1}{2} \left[\frac{dV}{dx} \right]^2 = \frac{2c_0 k_B T}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left[\text{ch} \frac{qV}{k_B T} - 1 \right]$.

29. Pour effectuer l'application numérique, il faut faire attention aux unités pour la concentration : $c_0 = 10 N_A \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 6,02 \times 10^{24}$ en ions par mètre-cube. On trouve que $\frac{qU_0}{2k_B T} = 9,66$, puis $\text{ch} \frac{qU_0}{2k_B T} = 7850$. À partir de là, on peut calculer le champ électrique : $E = 2\sqrt{\frac{c_0 k_B T}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\text{ch} \frac{qU_0}{2k_B T} - 1)}$. On trouve : $E = 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le champ à l'intérieur de l'atome d'hydrogène est de la forme : $E_{at} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 5 \times 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Le champ trouvé au niveau de l'électrode est un champ très élevé mais quand même un peu plus faible que celui de l'intérieur d'un atome d'hydrogène. Les molécules d'eau ne peuvent pas être ionisées aisément au niveau de l'électrode.

30. Ici, on appliquera le théorème de GAUSS sur une surface fermée parallélépipédique passant en $x = 0$ et en $x = a/2$ et de section S . La charge intérieure correspond bien avec ces limites en x à la question posée. Or, nous avons vu que, par antisymétrie, le potentiel est nul est $x = 0$ et que le champ électrique l'y est aussi. Dans ces conditions, le flux du champ électrique est $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -SE_{x=a/2}$. La charge intérieure est donc telle que $q_{int} = -SE_{x=a/2} \epsilon_0 \epsilon_r$. On trouve donc que : $q_{sol} = -\epsilon_0 \epsilon_r SE_{x=a/2} = -73 \times 10^{-6} \text{ C}$.

31. Pour trouver la charge portée par l'électrode métallique, on applique à nouveau le théorème de GAUSS mais cette fois en passant en $x = 0$ puis en $x > a/2$ pour passer dans l'électrode métallique elle-même. Le champ électrique dans le conducteur, considéré comme parfait est nul, donc le flux à travers la surface fermée est nul et, par conséquent, la charge intérieure aussi. La charge de l'électrode est opposée à la charge accumulée dans la solution : $q_{elec} = -q_{sol}$.

32. On a $C_{dyn} = \epsilon_0 \epsilon_r S \frac{dE}{dU_0}$ avec $E = 2\sqrt{\frac{c_0 k_B T}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\text{ch} \frac{qU_0}{2k_B T} - 1)}$. En utilisant les relations : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$, $\text{ch} 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$, on peut transformer l'expression du champ électrique afin de faciliter la dérivation : $E = 2\sqrt{\frac{2c_0 k_B T}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \text{sh} \frac{qU_0}{2k_B T}$. Après calculs : $C_{dyn} = Sq\sqrt{\frac{c_0 \epsilon_0 \epsilon_r}{2k_B T}} \text{ch} \frac{qU_0}{4k_B T} = 7,3 \times 10^{-4} \text{ F}$.

Confrontation à l'expérience : modèle de Stern

33. Le tracé de $\frac{1}{C_{dyn}}$ en fonction de $\frac{1}{\sqrt{c_0}}$ donne une droite quasi-parfaite de coefficients $A = 3,5$ et $B = 0,42$ dans le système d'unités approprié.

34. Si on associe les deux modèles proposés, on peut constituer la mise en série de deux condensateurs C_{dc} avec la capacité dynamique du modèle précédent de GOUY et CHAPMAN qu'on notera C_{GC} . Or, on a montré avant que cette capacité est proportionnelle à $\sqrt{c_0}$ donc la mise en série des condensateurs donne $\frac{1}{C_{dyn}} = \frac{2}{C_{dc}} + \frac{1}{C_{GC}}$. Cette association justifie parfaitement la loi : $\frac{1}{C_{dyn}} = A + \frac{B}{\sqrt{c_0}}$.

Problème n° 2 – Lentille magnétique

Capes 2008

1. La distribution de courant constituée par les N spires est invariante par rotation d'angle θ , les composantes du champ magnétique ne dépendront pas de θ . De plus, le plan $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie de cette distribution de courant, \mathbf{B} appartient donc à ce plan d'où $B_\theta(r, z) = 0$. On en déduit donc que le champ magnétique ne possède que deux composantes et ne dépend que de deux variables : $\mathbf{B} = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z$.

2. L'équation de conservation du flux magnétique est au niveau local $\text{div} \mathbf{B} = 0$. À partir de l'expression proposée par l'énoncé de la divergence en coordonnées cylindriques, on peut écrire que $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. On en déduit que $\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq -r \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}$. On intègre par rapport à r . On obtient $rB_r = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} + \text{Cte}$. Cette constante d'intégration est nécessairement nulle car en $r = 0$, il ne peut y avoir de divergence des composantes du champ magnétique. On trouve donc que : $B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}$. En faisant l'approximation à l'ordre 0 sur la composante du champ magnétique selon \mathbf{e}_z , on arrive alors à l'expression attendue :

$$\mathbf{B}(M) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \mathbf{e}_r + B_z(0, z) \mathbf{e}_z$$

3. On considère une spire filiforme de rayon a parcourue par une intensité permanente NI de centre O et d'axe Oz . Soit $M(z)$ le point de l'axe Oz où on souhaite obtenir l'expression du champ magnétique créé par la spire. Soit un point P de la spire et $Id\mathbf{OP}$ un élément de courant de celle-ci. Tous les plans qui contiennent Oz , axe de la spire, sont plan d'antisymétrie Π^- . Par conséquent, le champ magnétique créé en M est dirigé selon Oz . Par la formule de BIOT-SAVART, on écrit que $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \mathbf{e}_z \oint_{\text{spire}} \left(\frac{d\mathbf{OP} \wedge \mathbf{PM}}{PM^3} \right) \cdot \mathbf{e}_z$. Or, en utilisant les coordonnées cylindriques, $\mathbf{OP} = a\mathbf{e}_r$, $d\mathbf{OP} = a d\theta \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{PM} = -a\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ et $PM^3 = (a^2 + z^2)^{3/2}$. On constate donc que $(d\mathbf{OP} \wedge \mathbf{PM}) \cdot \mathbf{e}_z = a^2 d\theta$ et dans ces conditions, l'expression du champ magnétique créé devient $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \mathbf{e}_z \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \oint_{\text{spire}} d\theta$ avec évidemment $\oint_{\text{spire}} d\theta = 2\pi$. En mettant en forme le résultat de cette intégration, on trouve bien que $B_z(0, z) = \frac{B_0}{[1 + z^2/a^2]^{3/2}}$ avec $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2a}$. L'allure de la fonction $f(z) = B_z(0, z)/B_0$ est fourni à la figure 1. On constate que la fonction est paire en z , ce qui correspond au fait que B_z est perpendiculaire au plan de la spire qui constitue un plan de symétrie Π^\pm . On trouve que $f(10a) \simeq 10^{-3}$, ce qui est assez faible et montre qu'assez rapidement en dehors d'une zone proche de la spire, le champ magnétique sera négligeable. Pour obtenir le tracé de la courbe d'évolution du module du champ magnétique, il faut utiliser une sonde à effet HALL qui l'on va progressivement translater du centre de la spire vers $z > 0$ en la maintenant toujours bien orientée afin de ne mesurer que la composante axiale du champ magnétique.

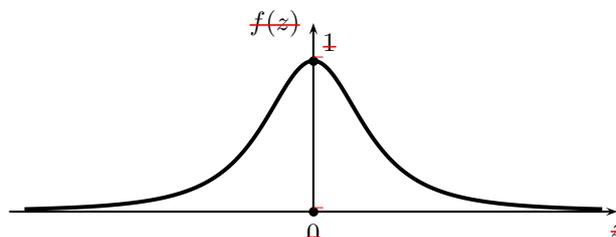


FIG. 1 – Évolution du champ magnétique de la spire