

- I. (A) 1. Le milieu impose au champ électrique les conditions aux limites suivantes : $E_z(y=0) = E_z(y=b) = 0$. Une onde plane progressive monochromatique dont l'amplitude est la même en tout point d'un plan perpendiculaire à sa direction de propagation ne peut pas réaliser ces conditions.
2. a) L'onde réfléchie obéit aux lois de Descartes. L'angle d'incidence sur le conducteur doit être égal à l'angle de réflexion. Le vecteur d'onde est $\vec{k} = k_0 \cos \alpha \vec{e}_x - k_0 \sin \alpha \vec{e}_y$ avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Le champ électrique incident étant orienté selon Oz , seul un champ orienté aussi selon cette direction peut convenir, on propose donc :

$$\vec{E}_2 = \vec{A} \exp i(\omega t - k_0 \cos \alpha x + k_0 \sin \alpha y)$$

La condition citée plus haut appliquée en $y = 0$ donne :

$$E_0 \vec{e}_z \exp i(\omega t - k_0 \cos \alpha x) + \vec{A} \exp i(\omega t - k_0 \cos \alpha x) = \vec{0}$$

dont la seule solution est $\vec{A} = -E_0 \vec{e}_z$. Calculons le champ total résultant de l'existence des deux ondes dans le vide :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \exp i(\omega t - k_0 \cos \alpha x) [\exp(-ik_0 \sin \alpha y) - \exp(ik_0 \sin \alpha y)]$$

On trouve alors le résultat suivant :

$$\vec{E} = 2E_0 \vec{e}_z \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha y \right) \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \alpha x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Il faut maintenant vérifier la condition aux limites en $y = b$. Elle apporte la relation $\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha b = p\pi$. Les valeurs de p entier naturel non nul qui conviennent sont celles qui respectent $0 < \sin \alpha < 1$.

b) Le champ de l'onde incidente et celui de l'onde réfléchie sont solutions des équations de Maxwell dans le vide, leur superposition l'est aussi par linéarité du système d'équations. Le terme de propagation étant $\exp i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \alpha x - \frac{\pi}{2})$, on voit que la direction de propagation est Ox et que le sens est celui des x croissants. On a donc $k_g = k_0 \cos \alpha$.

3. a) Comme la longueur d'onde est $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, la condition de quantification peut se réécrire selon :

$$f = p \frac{c}{2b \sin \alpha} > \frac{c}{2b \sin \alpha} > \frac{c}{2b}$$

La condition vérifiée par b est donc : $c = \frac{b}{2f}$. On trouve $b > 6$ cm.

b) On a vu que $k_g = k_0 \cos \alpha$. En élevant cette relation au carré et en utilisant $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, on obtient la relation de dispersion :

$$k_g^2 = k_0^2 - \frac{p^2 \pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{b^2}$$

c) En différentiant la relation de dispersion, on obtient $\frac{2\omega d\omega}{c^2} = 2k_g dk_g$. Cela nous permet de retrouver la relation $v_g v_\phi = c^2$.

$$\begin{aligned} \text{Vitesse de phase : } v_\phi &= \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{p^2 f_c^2}{f^2}}} \\ \text{Vitesse de groupe : } v_g &= \frac{d\omega}{dk_g} = c \sqrt{1 - \frac{p^2 f_c^2}{f^2}} \end{aligned}$$

4. Le champ électrique est normal aux deux plans introduits, il est donc parfaitement possible de les mettre sans que soit remise en cause la forme du champ électrique vue précédemment. La discontinuité du champ entre le vide et le conducteur (où il est nul) va justement être la cause de l'apparition de charges surfaciques sur ces deux plans.

- (B) 1. Le champ électrique \vec{E}_i en $x = 0$ et $x = l$ est tangent à la surface du conducteur. Or le champ électrique tangent doit être continu et par conséquent nul $\forall(y, z, t)$ puisque le conducteur est supposé parfait. Il est indispensable d'envisager l'existence d'un champ réfléchi pour respecter cette condition aux limites. La condition $\vec{E}_i(x = 0) + \vec{E}_0(x = 0) = \vec{0}$ impose $\underline{K} = -1$. Celle en $x = l$ impose $\sin k_g l = 0$ d'où $k_g l = m\pi$.
2. En utilisant la relation de dispersion trouvée avant, on obtient :

$$\frac{m^2 \pi^2}{l^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{b^2}$$

Cela conduit immédiatement à la relation proposée par l'énoncé.

3. a) La partie de \vec{E} dépendant de y vient des calculs réalisés auparavant. Par contre, en sommant les amplitudes des deux ondes se propageant en sens contraire on obtient :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin \frac{p\pi y}{b} (-i) [\exp(-ik_g x) - \exp(ik_g x)] \exp i\omega t \vec{e}_z$$

Cela nous permet d'obtenir la forme préconisée par l'énoncé :

$$\vec{E} = 4E_0 \sin \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{l} \exp i\omega t \vec{e}_z$$

Le champ électrique étant orienté selon l'axe Oz , il est normal aux parois de la cavité en $z = 0$ et en $z = a$. Ce sont sur ces deux faces qu'il y aura apparition d'une distribution surfacique de charges. En $z = 0$, la normale du conducteur vers le vide étant égale à \vec{e}_z , on aura la distribution surfacique suivante (en réels) :

$$\sigma_{z=0} = 4\varepsilon_0 E_0 \sin \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \omega t$$

Faisons une représentation de la paroi située en $z = 0$ à la date $t = 0$:

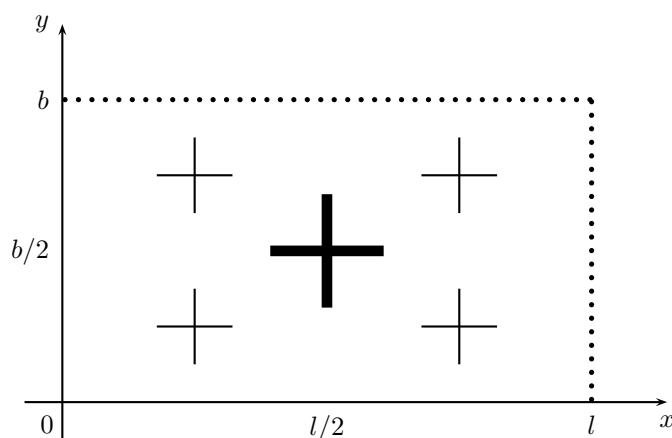


FIG. 1 – Charges surfaciques

- b) Le champ magnétique s'obtient par l'équation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En coordonnées cartésiennes et en utilisant l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \wedge E_z \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

On trouve ainsi que le champ magnétique possède deux composantes selon l'expression :

$$\vec{B} = \left[\frac{p\pi}{b} \cos \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{l} \vec{e}_x - \frac{m\pi}{l} \sin \frac{p\pi y}{b} \cos \frac{m\pi x}{l} \vec{e}_y \right] \frac{E_c}{\omega} \exp i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_z$$

Comme le champ magnétique possède deux composantes sur Ox et Oy , il y a toujours au moins une composante tangentielle à une des faces. Comme c'est celle-ci qui est responsable de l'apparition de courants surfaciques, on peut en conclure que des courants existent sur chacune d'elles.

c) L'énergie électrique volumique est donnée par $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$. On en déduit donc que :

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E_c^2}{2} \sin^2 \frac{p\pi y}{b} \sin^2 \frac{m\pi x}{l} \cos^2 \omega t$$

En calculant la valeur moyenne spatiale (en x et en y), on obtient :

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E_c^2}{8} \cos^2 \omega t$$

Ainsi, en multipliant par le volume V de la cavité, on aboutit à la relation :

$$W_e(t) = W_0 \cos^2 \omega t$$

En ce qui concerne le champ magnétique, le calcul est un peu plus long. L'énergie magnétique volumique est donnée par $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Après calcul et prise des moyennes spatiales toujours sur x et y , on obtient :

$$w_m = \frac{E_c^2}{8\mu_0\omega^2} \left[\frac{p^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2} \right] \sin^2 \omega t$$

Il faut utiliser la relation de dispersion, l'expression se simplifie alors et on peut écrire que :

$$w_m = \frac{E_c^2}{8\mu_0 c^2} \sin^2 \omega t$$

Par conséquent, en multipliant par le volume de la cavité et en utilisant la relation $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, on peut conclure sur l'expression :

$$W_m(t) = W_0 \sin^2 \omega t$$

La représentation de l'évolution temporelle des énergies électrique et magnétique est :

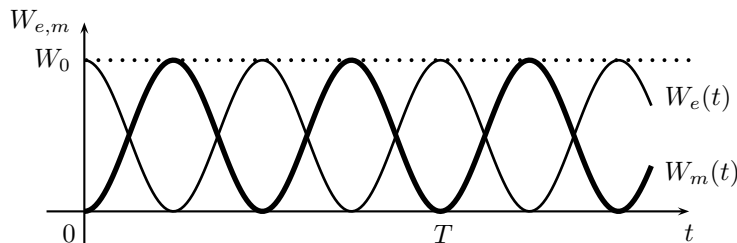


FIG. 2 – Énergie électromagnétique

L'énergie électromagnétique totale est constante et vaut W_0 . Il n'y a aucune dispersion d'énergie, on pouvait s'y attendre puisque l'intérieur de la cavité est vide et les parois formées de conducteurs parfaits. L'analogie est réalisée avec un circuit non résistif de type LC . Il y a dans ce circuit en permanence transformation d'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur en énergie magnétique emmagasinée dans la bobine et réciproquement.

- II. (A) 1. Compte tenu de la forme du montage, on comprend que le fait d'ajouter une nouvelle cellule en **T** à gauche d'une ligne déjà très longue ne modifie pas la valeur de l'impédance équivalente, il y a convergence de celle-ci. Appelons Z la valeur de l'impédance équivalente. Ajoutons une cellule supplémentaire à gauche, le montage est alors celui de la figure 3. L'impédance de l'ensemble est toujours Z .

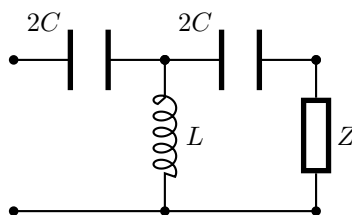


FIG. 3 – Impédance de ligne

Compte tenu des règles d'associations des impédances en série et en parallèle, en posant $Z_1 = \frac{1}{j2C\omega}$ et $Z_2 = jL\omega$, on a :

$$Z = \frac{(Z + Z_1)Z_2}{(Z + Z_1 + Z_2)} + Z_2$$

ce qui conduit à l'équation $Z^2 = Z_1^2 + 2Z_1Z_2$. On obtient ensuite :

$$Z^2 = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{1}{4LC\omega^2} \right)$$

La pulsation critique est par conséquent $\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$.

2. Si Z^2 est positif alors les deux racines sont réelles et on trouve $Z = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$. La solution positive correspond à un dispositif absorbant de l'énergie alors que la solution négative correspond à un système fournissant de l'énergie (résistance négative). Par contre si Z^2 est négative, on a affaire à une impédance imaginaire pure $Z = \pm j \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}$.

Le point de vue attendu dans cet énoncé semble être le suivant : en haute fréquence, la ligne proposée est purement résistive et absorbe donc de l'énergie fournie par le générateur qui l'alimente, tout comme le guide d'ondes absorbe et transmet l'énergie d'un oscillateur de haute fréquence qui serait disposé devant lui. En basse fréquence, la ligne est purement capacitive et n'absorbe aucune énergie : il n'y a pas transmission de signal du générateur à la ligne.

L'analogie est cependant très douteuse, pour au moins deux raisons :

- d'une part, les analogues physiques des éléments L et C ne sont pas clairement identifiables dans un guide d'ondes traditionnel ;
- d'autre part, lorsque Z est réel, le dipôle proposé par l'énoncé ne transmet pas de signal d'un élément (L, C) au suivant ; bien au contraire, ce signal est absorbé au fur et à mesure du passage d'une cellule à la suivante.

On se serait plutôt attendu ici à trouver l'analogie classique d'une ligne électrique, à savoir l'intervention des dipôles L et C , comme sur la figure 4.

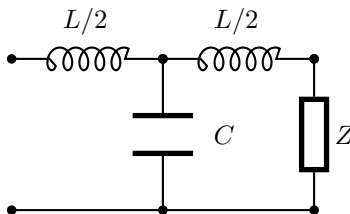


FIG. 4 – Modèle du guide d'ondes

Avec ce nouveau modèle de cellule en \mathbf{T} , on trouve l'expression suivante :

$$Z^2 = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{LC\omega^2}{4} \right)$$

En haute fréquence, Z est imaginaire pur car

$$Z = \pm j \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

avec $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

Ainsi, chaque élément (L, C) transmet et déphase le signal sans atténuation. La situation de propagation sans atténuation s'obtient pour $\omega > \omega_c$, ce qui est conforme aux lois habituelles des guides d'ondes.

- (B) 1. a) Nous avons déjà vu l'expression de la vitesse de phase. A partir de la définition de l'indice, il vient facilement :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{p^2 f_c^2}{f^2}}} \quad \text{et} \quad n = \sqrt{1 - \frac{p^2 f_c^2}{f^2}} < 1$$

- b) On sait que pour une lentille en verre traditionnelle de forme plan concave et un faisceau lumineux traversant successivement les milieux d'indice 1, $n > 1$, 1, on obtiendra un faisceau divergent. Ici pour les dioptries proposés qui sont plan - concave, on a une relation d'ordre inversée pour les indices des milieux successivement traversés 1, $n < 1$, 1. Le dispositif proposé sera donc équivalent à une lentille convergente. Le principe de Fermat veut que le chemin optique parcouru par un rayon lumineux soit extremum. Dans une exponentielle de propagation du type $\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, le terme $\vec{k} \cdot \vec{r}$ mesure le chemin optique parcouru. Il est donc logique de considérer, pour la définition de l'indice, la vitesse de phase.
2. a) La pratique d'une ouverture (de petite taille devant la longueur d'onde) dans le guide d'ondes va perturber les distributions surfaciques de charges et de courant. Localement, le modèle de l'onde plane dans le guide d'onde inférieur (qui joue le rôle d'excitateur) doit être revu. Cette situation est vraisemblablement complexe. Toutefois, on peut comprendre que par diffraction un champ électromagnétique va exister dans le guide d'ondes supérieur. Par diffraction, toutes les directions sont envisageables. Mais, comme nous l'avons vu au début du problème, par réflexion sur les parois du guide il n'est pas utopiste d'envisager la formation d'une onde plane comme celle proposée par l'énoncé. La forme de l'onde se propageant dans le sens des x décroissant est donc $s_A^- = s_0 \exp [i(\omega t + kx)]$.
- b) On effectue un second trou distant du premier d'un quart de longueur d'onde. Ainsi les ondes émises par B seront déphasées de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport à celles émises par A . Il ne faut pas oublier de plus que le chemin à parcourir pour atteindre un point $M(x)$ d'abscisse x du guide d'onde est réduit d'un quart de longueur d'onde. Cela permet de comprendre les formes des amplitudes complexes demandées :

$$s_B^+ = s_0 \exp \left(-i\frac{\pi}{2} \right) \exp \left[i \left(\omega t - k \left(x - \frac{\lambda}{4} \right) \right) \right]$$

$$s_B^- = s_0 \exp \left(-i\frac{\pi}{2} \right) \exp \left[i \left(\omega t + k \left(x - \frac{\lambda}{4} \right) \right) \right]$$

A partir de ces expressions, on voit rapidement que les deux ondes se propageant dans le sens x croissant sont en phase alors que les deux ondes se propageant dans le sens des x décroissant sont en opposition de phase puisque :

$$s_B^+ = s_0 \exp [i(\omega t - kx)]$$

$$s_B^- = -s_0 \exp [i(\omega t + kx)]$$

c) On montre donc facilement qu'il ne subsiste qu'une onde plane progressive dans le sens des x croissant qui a pour expression :

$$s_{tot}^+ = 2s_0 \exp [i(\omega t - kx)]$$

Cette méthode de couplage de deux guides d'ondes appelle quand même quelques remarques car elle n'est pas réaliste sur le plan pratique. Par les deux trous réalisés en A et B , il ne pourra passer qu'une quantité très faible d'énergie. Le couplage de deux guides d'ondes demande en réalité des dispositifs beaucoup plus sophistiqués.

- III. (A) 1. En raisonnant sur une surface S comprise entre les abscisses x et $x + dx$, on effectue un bilan de puissance traduisant que la diminution de puissance correspond à ce qui a été absorbé par le milieu :

$$S(-P(x + dx) + P(x)) = \alpha P S dx$$

Cela donne une équation différentielle classique du premier ordre qui a pour solution :

$$P = P_0 \exp(-\alpha x)$$

2. La puissance transportée par l'onde arrivant sur la gauche est donnée par $P_1 = P_0 \exp[-\alpha(x + l)]$ alors que celle arrivant de la droite est $P_2 = P_0 \exp[\alpha(x - l)]$. Ainsi, on a $P_1(x = l) = P_0 \exp -2\alpha l$ et $P_2(x = -l) = P_0 \exp -2\alpha l$. La puissance absorbée vaut donc :

$$\sigma = 2\frac{P_0}{2l} (1 - \exp(-2\alpha l)) \approx 2\alpha P_0$$

L'application numérique conduit à $\sigma = 240 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

3. On peut observer que par symétrie du dispositif, la température est nécessairement une fonction paire de x et par conséquent le flux thermique de conduction est une fonction impaire de x . Ou bien, dit d'une autre façon, il n'y a pas de raison qu'il y ait en $x = 0$ un flux de conduction allant d'un côté à l'autre car cela voudrait dire qu'un côté du dispositif est plus chaud que l'autre côté. On a donc $\vec{j}_c(x = 0) = \vec{0}$. On évoquera maintenant la continuité du flux thermique en $x = l$ est en $x = -l$ à travers une surface de section S . Le flux de conduction dans le matériau est uniquement créé par la convection avec l'air extérieur. En effet, la puissance surfacique P_0 de l'onde franchit intégralement la surface S d'abscisse $x = \pm l$. Elle ne doit pas être prise en compte puisqu'on ne raisonne pas comme en III(A)1 sur un volume d'épaisseur dx . On a donc :

$$\vec{j}_c(x = l) = -h(T_a - T_{x=l})\vec{e}_x \quad \vec{j}_c(x = -l) = h(T_a - T_{x=-l})\vec{e}_x$$

sans oublier que la fonction de la température doit être paire et donc que $T_{x=l} = T_{x=-l}$. On peut évidemment limiter la suite de l'étude à l'intervalle $[0, l]$.

(B) On considère toujours un volume élémentaire Sdx , en utilisant le fait que $\alpha l \gg 1$, on peut dire que la puissance volumique absorbée est indépendante de x et vaut σ . Traduisons le fait que la variation d'énergie par rapport au temps du système étudié est égale à la puissance rentrant dans le système moins la puissance sortant plus la puissance absorbée :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} S dx = j_c(x, t) S - j_c(x + dx, t) S + \sigma S dx$$

En utilisant la loi de Fourier $j_c = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on obtient l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u$$

On trouve que la diffusivité thermique est $D = 5.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

(C) 1. En régime permanent (indépendant du temps), on a $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. On obtient donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{u}{D}$$

Une première intégration conduit à : $\frac{dT}{dx} = -\frac{u}{D}x + A$. Avec la condition en $x = 0$ où il n'y a pas de flux de conduction $\frac{dT}{dx}(x = 0) = 0$, la constante d'intégration est nulle. On peut réécrire l'équation selon $\frac{dT}{dx} = -\frac{u}{D}x = -\frac{\sigma}{\lambda}x$. On peut intégrer une nouvelle fois et en utilisant une condition aux limites, on obtient : $T(x) = T_{x=l} - \frac{\sigma}{2\lambda}(x^2 - l^2)$. La détermination de l'expression de $T_{x=l}$ s'effectue en utilisant la continuité du flux surfacique en $x = l$ que nous avons déjà vue en III(A)3. Finalement l'expression de la loi de température est :

$$T(x) = T_a + \frac{\sigma l}{h} - \frac{\sigma}{2\lambda}(x^2 - l^2)$$

Les représentations graphiques sont réalisées sur la figure 5.

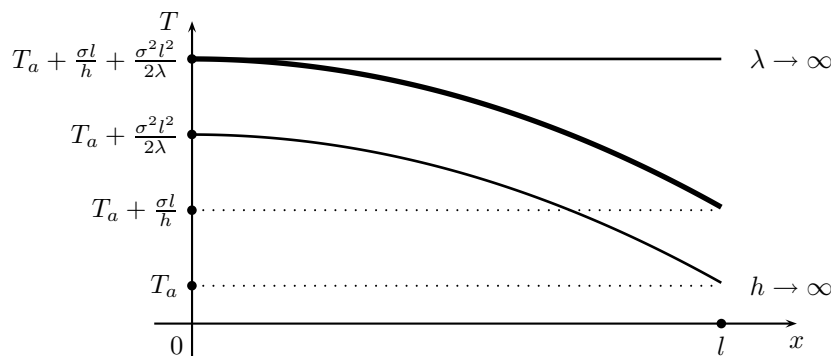


FIG. 5 – Température dans le caoutchouc

2. L'écart maximal de température s'obtient entre $x = 0$ et $x = l$. On trouve :

$$\Delta T_{max} = \frac{\sigma l^2}{2\lambda} = 0,8 \text{ °C}$$

Il faut qu'il soit le plus petit possible afin que la vulcanisation du caoutchouc soit la plus homogène possible.

(D) 1. a) On étudie maintenant le régime variable. L'équation différentielle est donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u$$

On comprend que u_0 correspond à la puissance $\frac{P_0}{2}$ et que Δu correspond lui à la puissance $\frac{2P_0}{\pi}$ en prenant garde au fait que le développement de la puissance fait apparaître un sinus ce qui va faire intervenir en complexe le nombre i . On a :

$$u_0 = \frac{\alpha P_0}{\rho c_p} \quad \Delta u = \frac{1}{i} \frac{4\alpha P_0}{\pi \rho c_p}$$

b) La température T_1 correspond à la solution stationnaire, T_2 à la solution en régime variable. Pour la partie stationnaire, on a :

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{u_0}{D}$$

Pour la partie variable, on obtient :

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \Delta u \exp i\omega t$$

2. a) En utilisant la forme proposée pour T_2 , on obtient :

$$D \frac{d^2 f}{dx^2} - i\omega f(x) = -\Delta u$$

Par analyse dimensionnelle de cette équation différentielle, on voit que la longueur caractéristique est $l_c^2 = \frac{D}{\omega}$. L'application numérique conduit à l'ordre de grandeur suivant : $l_c \approx 1$ mm. Comme la longueur du système est $l > 10l_c$, on peut considérer puisque l'énoncé nous y invite que le milieu est infini même s'il n'y a pas beaucoup de marge. La solution de l'équation de $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = C_1 \exp\left(\frac{(1+i)x}{l_c\sqrt{2}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{(1+i)x}{l_c\sqrt{2}}\right) - i \frac{\Delta u l_c^2}{D}$$

b) Si le milieu est considéré comme infini, seule subsiste la condition liée à l'existence d'une température bornée aux extrémités. Mais il n'est pas évident a priori que la température T_2 ne dépende pas x . Avec un système doublement infini (à gauche et à droite), les termes exponentiels divergeraient. Il faut donc que les coefficients C_1 et C_2 soient nuls. Dans ces conditions, seule subsiste dans la solution trouvée, la solution particulière de l'équation différentielle. On peut donc écrire que :

$$T_2 = \frac{\Delta u}{i\omega} \exp i\omega t$$

On voit immédiatement que T_2 est la primitive de Δu . L'amplitude des variations est donnée par :

$$\Delta T_2 = \frac{4\alpha P_0}{\pi \rho c_p \omega} \approx 0,01 \text{ °C}$$

(E) 1. a) Considérons pour commencer la cellule de température T_2 . Son énergie varie parce qu'elle reçoit de la puissance de la part de l'onde mais aussi parce qu'il y a des transferts thermiques au niveau de ses deux faces. A droite avec l'air ambiant, à gauche avec l'autre cellule. L'équation de conservation de l'énergie (écrite en puissance) est alors :

$$\rho c_p S \Delta l \frac{dT_2}{dt} = -\frac{\lambda S}{\Delta l} (T_2 - T_1) + \sigma \Delta l S + hS(T_a - T_2)$$

En utilisant les données fournies par l'énoncé, il vient :

$$C_c \frac{dT_2}{dt} + \alpha T_2 + hST_2 = \alpha T_1 + P_c + hST_a$$

En faisant le même raisonnement pour le système à la température T_1 , sans oublier qu'il n'y a pas de transfert thermique sur sa face gauche, on obtient :

$$C_c \frac{dT_1}{dt} + \alpha T_1 = \alpha T_2 + P_c$$

b) En oubliant temporairement le terme qui dissymétrise le système d'équation différentielle, on voit qu'il faut commencer par symétriser le circuit proposé. Ensuite, il ne reste plus qu'à rajouter une source de courant en parallèle sur le condensateur C_2 . Le schéma du circuit est alors celui de la figure 6.

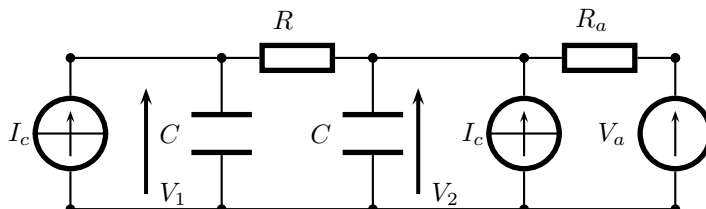


FIG. 6 – Analogie Électricité - Transferts thermiques

2. La diffusivité thermique D s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur d'une cellule est en $\frac{l}{N}$. Par conséquent, une longueur au carré est $\left(\frac{l}{N}\right)^2$. Dans ces conditions, on peut écrire que $D \equiv \frac{l^2}{N^2 \tau}$. La durée τ doit être très petite devant la durée caractéristique de l'excitation T_0 . On obtient donc la condition :

$$N \gg l \sqrt{\frac{1}{DT_0}}$$

L'application numérique conduit à prendre N grand devant 3, on peut par exemple choisir de réaliser 30 cellules dans le matériau.

- IV. (A) 1. a) L'équation de Maxwell-Gauss donne : $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ puisque le champ électrique proposé ne dépend pas de x . On en déduit immédiatement que $\rho = 0$.
 b) En fait, cela revient à comparer γ avec $\varepsilon_0 \omega$. L'application numérique conduit à $\gamma = 5.9 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et à $\varepsilon_0 \omega = 0,14 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. On peut donc logiquement négliger le courant de déplacement devant le courant dans l'équation de Maxwell-Ampère. On se place ainsi dans l'approximation des régimes quasi-permanents.

c) A partir de l'équation $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et de $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on obtient l'équation donnant le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant la forme proposée pour le champ électrique, il vient l'équation différentielle à laquelle obéit E_y :

$$\frac{d^2 E_y}{dy^2} - (i\mu_0 \gamma \omega + k^2) E_y = 0$$

D'après la définition proposée par l'énoncé, on peut écrire que : $i\mu_0 \gamma \omega + k^2 = \frac{2i}{\delta^2} + k^2$. Il faut donc comparer les valeurs de k et de $\frac{1}{\delta}$. On trouve : $k = 56 \text{ m}^{-1}$ et $\frac{1}{\delta} = 10^6 \text{ m}^{-1}$. En ne conservant que le terme significatif, les racines de l'équation caractéristiques sont $r = \pm \frac{(1+i)}{\delta}$. Le milieu étant illimité en y , on ne peut que retenir la solution dont la partie réelle est négative. Ainsi la densité volumique de courant est donnée par l'expression :

$$\vec{j}_v = \vec{j}_0 \exp -\frac{y}{\delta} \exp i \left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta} \right)$$

avec $\vec{j}_0 = \gamma \vec{E}_0$.

2. a) Par définition de l'intensité, on a : $\vec{j}_s = \int_0^\infty \vec{j}_v dy$.

b) La puissance volumique dissipée par effet Joule est $p_{vol} = \frac{\vec{j}_v^2}{\gamma}$. On en déduit que :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \left\langle \int_0^\infty \frac{\vec{j}_v^2}{\gamma} dy \right\rangle$$

c) Comme $\int_0^\infty \exp -\frac{y}{\delta} dy = \delta$, on obtient aisément :

$$\vec{j}_s = \delta \vec{j}_0 \exp i \left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta} \right)$$

On peut donc calculer : $\langle \vec{j}_s^2 \rangle = \frac{\delta^2 j_0^2}{2}$. Ensuite, le module de \vec{j}_v^2 est donné par $\vec{j}_v^2 = j_0^2 \exp -\frac{2y}{\delta}$. On peut en déduire que :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{j_0^2}{\gamma} \int_0^\infty \exp -\frac{2y}{\delta} dy = \frac{\delta j_0^2}{2}$$

On peut conclure sur l'expression de l'énoncé :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{\langle \vec{j}_s^2 \rangle}{\gamma \delta}$$

d) En appelant j_u la densité volumique de courant uniforme existant sur l'intervalle $[0, \delta_{eff}]$, on en déduit immédiatement que :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{j_u^2 \delta_{eff}}{\gamma} = \frac{j_s^2}{\delta \gamma} = \frac{j_0^2 \delta}{\gamma}$$

On voit aussitôt que : $\delta_{eff} = \delta$.

(B) 1. La condition de passage pour le champ magnétique à la surface du conducteur est :

$$\vec{B}_{vide} - \vec{B}_{cond} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow vide}$$

Comme le champ magnétique est nul dans le conducteur, on a immédiatement : $B^2 = \mu_0^2 j_s^2$.

2. A partir de la relation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \wedge E(x, y) \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

on trouve les composantes suivantes pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\pi}{b\omega} E_0 \cos \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g x) \\ B_y &= -\frac{k_g}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g x) \end{aligned}$$

On trouve ensuite la moyenne temporelle de B^2 qui vaut :

$$\langle B^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2\omega^2} \left[k_g^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right]$$

3. On peut alors calculer $\langle j_s^2 \rangle$ en utilisant la relation de dispersion qui est $\frac{\pi^2}{b^2} + k_g^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}$. On obtient :

$$\langle j_s^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0^2 \omega^2} \left[\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^2}{b^2} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right]$$

La détermination de la puissance surfacique n'est pas évidente car il faut distinguer dans le raisonnement les faces $y = 0$, $y = b$ pour lesquelles $B_y = 0$ et $B_x \neq 0$, des faces $z = 0$, $z = a$ où les deux composantes du champ magnétique interviennent. Et pour ces dernières, il faut intégrer sur y . Pour les premières faces citées qui sont équivalentes en terme de puissance, on a :

$$\left(\frac{dP}{dx} \right)_1 = 2a \frac{1}{\gamma \delta} \frac{E_0^2}{2\mu_0^2 \omega^2} \left[\frac{\pi^2}{b^2} \right]$$

De la même façon, on arrive pour les deux autres faces a :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_2 = 2 \frac{1}{\gamma\delta} \frac{E_0^2}{2\mu_0^2\omega^2} \left[\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy + \frac{\pi^2}{b^2} \int_0^b \cos \frac{2\pi y}{b} dy \right]$$

Finalement, en additionnant les deux contributions, on obtient :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{\gamma\delta} \frac{E_0^2}{\mu_0^2\omega^2} \left[\frac{\pi^2 a}{b^2} + \frac{2\pi^2 b}{\lambda_0^2} \right] = \frac{1}{2\gamma\delta} \frac{E_0^2 \lambda_0}{\mu_0^2 c^2} \left[\frac{a\lambda_0^2}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right]$$

Cela conduit à l'expression fournie par l'énoncé en posant : $p_0 = \frac{1}{2\gamma\delta} \frac{E_0^2 \lambda_0}{\mu_0^2 c^2}$.

4. Pour minimiser les pertes, il faut que :

$$\frac{d}{db} \left(\frac{a\lambda_0}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right) = 0$$

On trouve alors : $b = (a\lambda_0^2)^{1/3} = 6,6$ cm. Ce résultat est cohérent avec la valeur fournie au début de l'énoncé et avec la condition $b > 6$ cm.

5. a) En observant les composantes du champ magnétique, on voit que seule la moyenne temporelle de la composante du vecteur de Poynting dirigée selon l'axe Ox sera non nulle. On obtient après avoir pris la moyenne spatiale selon y :

$$\vec{P} = \vec{e}_x \frac{k_g E_0^2}{2\mu_0\omega} \sin^2 \frac{\pi y}{b}$$

et ensuite la puissance moyenne en utilisant la relation de dispersion :

$$P_m = \frac{E_0^2}{8\mu_0 c} \sqrt{4 - \frac{\lambda_0^2}{b^2}} ab$$

b) Il suffit d'écrire que la puissance dissipée correspond à la diminution de la puissance moyenne, d'où :

$$\frac{dP_m}{dx} = -p_0 \left(\frac{a\lambda_0}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)$$

En remplaçant E_0^2 par sa valeur en fonction de P_m , on obtient une équation différentielle du premier ordre qui a pour solution $P_m = P_{m0} \exp -\beta x$ puisque cela donne :

$$\frac{dP_m}{dx} + \frac{4\lambda_0 \left(\frac{a\lambda_0}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)}{\gamma\delta\mu_0 c \sqrt{4b^2 - \lambda_0^2}} P_m = 0$$

La longueur caractéristique est donc :

$$L = \frac{\gamma\delta\mu_0 c a \sqrt{4b^2 - \lambda_0^2}}{4\lambda_0 \left(\frac{a\lambda_0}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)}$$

On trouve numériquement $L = 81$ m.