

# MATHÉMATIQUES II

## *Rappels, notations et objectifs du problème*

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre  $n$ . De plus :

- $\mathcal{M}_n$  désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre  $n$  ;
- si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $A_{i,j}$  le terme de  $A$  situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  ;
- pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(\alpha, \beta)$  est la matrice  $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  ;
- si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_p)$  sont dans  $\mathbb{R}^p$ , on désigne par  $\text{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \dots, M(\alpha_p, \beta_p))$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2p}$  définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux  $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \dots, M(\alpha_p, \beta_p)$  ;
- $I_n$  est la matrice unité  $\text{diag}(1, \dots, 1)$  élément de  $\mathcal{M}_n$  ;
- On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes $i$ et $j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne $i$ par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne $j$ , multipliée par le scalaire $\lambda$ , à la ligne $i$ ( $i \neq j$ )	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Si  $A \in \mathcal{M}_n$  et si  $E$  est la matrice obtenue à partir de  $I_n$  par utilisation d'une opération élémentaire, alors  $EA$  (resp.  $AE$ ) est la matrice obtenue à partir de  $A$  en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de  $A$  (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

# Filière PSI

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) canoniquement associé,
- vecteur de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) et matrice colonne de ses coordonnées,
- matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie  $s$  de  $\mathbb{R}^n$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $s^2 = s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  ; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires  $E_1$  et  $E_2$  tel que  $s$  soit la symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ , définie par :

$$s|_{E_1} = \text{Id}_{E_1} \text{ et } s|_{E_2} = -\text{Id}_{E_2}.$$

Préciser la symétrie  $s$ , c'est déterminer les sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  associés.

On note  $(P_A)$  la propriété :

$(P_A)$	A ne possède pas de valeur propre réelle
---------	--

Le but de ce problème est d'étudier des matrices de  $\mathcal{M}_n$  vérifiant la propriété  $(P_A)$ .

Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

## Résultats préliminaires

1) On se propose de démontrer le résultat suivant :

« deux matrices de  $\mathcal{M}_n$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n$  ».

Soit donc  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $P$  un élément de  $GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ .

a) Montrer qu'il existe  $R, J \in \mathcal{M}_n$  tels que  $P = R + iJ$  avec  $i^2 = -1$ .

b) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $A(R + tJ) = (R + tJ)B$ .

c) Montrer qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\det(R + t_0J) \neq 0$ .

d) En déduire que  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n$ .

2)

a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

b) En déduire que s'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  vérifiant  $(P_A)$ , alors  $n$  est pair.

Dans toute la suite du problème, on suppose  $n$  pair et on note  $n = 2p$   
avec  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

### **Partie I -**

**I.A -** Dans cette section I.A.1, on se place dans  $\mathbb{R}^2$  et on désigne par  $(e_1, e_2)$  la base canonique, avec  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ .

I.A.1) On considère la matrice  $M(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et on désigne par  $u$  l'endomorphisme associé.

a) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de  $s_1$ , symétrie par rapport à la droite  $\mathbb{R}e_1$  parallèlement à la droite  $\mathbb{R}e_2$ .

b) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application  $u \circ s_1$ .

En déduire qu'il existe une symétrie  $s_2$ , qu'on précisera, telle que  $u = s_2 \circ s_1$ .

I.A.2) On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

a) Montrer que  $A$  est semblable à  $M(0, 1)$  et donner une matrice  $P$  de  $\mathcal{M}_2$  à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que  $M(0, 1) = P^{-1}AP$ .

b) Montrer que  $A$  est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  des nombres réels tels que  $\beta^2 - \alpha^2 = 1$  et  $B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$ .

c) Montrer que  $B$  est semblable à  $M(0, 1)$  et donner une matrice  $Q$  de  $\mathcal{M}_2$  telle que  $M(0, 1) = Q^{-1}BQ$ .

*Indication* : on pourra calculer  $Be_1 = B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

d) Montrer que  $B$  est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.3) On considère la matrice  $M(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels tel que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Montrer que  $M(\alpha, \beta)$  est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.4) On considère à présent la matrice  $M(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels tels que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Montrer que  $M(\alpha, \beta)$  est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.5) Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  appartenant à  $\mathcal{M}_2$ .

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de  $A$  pour que  $(P_A)$  soit réalisée.

b) En supposant que  $A$  vérifie  $(P_A)$ , et en étudiant la diagonalisation dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  de  $A$ , montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à  $A$ , du type  $M(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha$  réel et  $\beta$  réel strictement positif. Expliciter  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .

c) Que peut-on dire de  $\det(A)$  si  $A$  vérifie  $(P_A)$  et est dans  $\mathcal{M}_2$  ?

d) Montrer que  $A$  est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.6) On suppose que  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne orientée canonique (i.e.  $(e_1, e_2)$  est orthonormée directe). Que sont alors les endomorphismes de matrice  $M(\alpha, \beta)$  (avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels tels que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ) dans la base canonique ?

**I.B** - Soit  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_p$  vérifiant  $B^2 = I_p$ . Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n$  définie par blocs sous la forme  $A = \begin{bmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{bmatrix}$ .

I.B.1) Montrer que  $B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_p$  et qu'il existe une matrice  $Q$  de  $\mathcal{M}_p$  inversible, des entiers naturels  $q$  et  $r$  tels que  $Q^{-1}BQ$  soit sous la forme d'une matrice par blocs  $\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix}$

*On convient que cette matrice vaut  $I_p$  lorsque  $r = 0$  et  $q = p$  et qu'elle vaut  $-I_p$  lorsque  $q = 0$  et  $r = p$ .*

I.B.2) Déterminer une matrice par blocs  $P$  de  $\mathcal{M}_n$  inversible et constituée de multiples de  $I_p$  telle que :  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}$ .

I.B.3) En déduire que  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n$  à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

I.B.4) Montrer alors que  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n$  à une matrice du type  $\text{diag}(M(0, 1), M(0, 1), \dots, M(0, 1))$ .

I.B.5) *Exemple* : on considère dans  $\mathcal{M}_4$  la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice inversible  $M$  de  $\mathcal{M}_4$  telle que

$$M^{-1}AM = \text{diag}(M(0, 1), M(0, 1)).$$

b) En utilisant la technique vue à la question I.A.1, montrer que  $A$  est la matrice, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  de la composée de deux symétries qu'on précisera.

## **Partie II -**

**II.A -** Dans cette question,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n$  telle que  $A^2 = -I_n$ .

II.A.1) Montrer que  $(P_A)$  est réalisée.

II.A.2) Si  $E$  est obtenue à partir de  $I_n$  par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on  $EAE^{-1}$  de  $A$  ?

On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme :

a)  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,

b)  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,

c)  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## II.A.3)

- a) En utilisant II.A.1, montrer qu'il existe  $i \geq 2$  tel que  $A_{i,1} \neq 0$ .
- b) En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe  $P \in \mathcal{M}_n$  inversible telle que si  $A' = PAP^{-1}$  alors  $A'_{i,1} = 0$  si  $i \neq 2$  et  $A'_{2,1} = 1$ .
- c) Montrer alors que  $A'_{i,2} = 0$  si  $i \neq 1$  et  $A'_{1,2} = -1$ .

II.A.4) Montrer qu'il existe  $Q \in \mathcal{M}_n$  inversible telle que  $QA'Q^{-1}$  soit de la forme par blocs  $\begin{bmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$  avec  $B \in \mathcal{M}_{n-2}$ .

II.A.5) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice du type

$$\text{diag}(M(0,1), M(0,1), \dots, M(0,1)).$$

II.A.6) *Exemple* : en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice  $M$  inversible de  $\mathcal{M}_4$  telle que  $MAM^{-1} = \text{diag}(M(0,1), M(0,1))$  où  $A$  est la matrice de la question I.B.5). On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

**II.B** - Dans cette question  $A$  est une matrice

$$\text{de } \mathcal{M}_n \text{ vérifiant } (A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0 \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

II.B.1) Montrer que  $A$  vérifie  $(P_A)$ .

II.B.2) Montrer que  $A$  est semblable à la matrice d'ordre  $n$

$$\text{diag}(M(\alpha, \beta), M(\alpha, \beta), \dots, M(\alpha, \beta)).$$

Que peut-on dire de  $\det(A)$  ?

**II.C** - Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  défini par : pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $u(P)$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, u(P)(x) = x^{n-1} P\left(\frac{-1}{x}\right).$$

II.C.1) Déterminer pour quelles valeurs de  $i$  et  $j$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$ , le plan  $\text{vect}(X^i, X^j)$  est stable par  $u$ .

II.C.2) En déduire que la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  telle que  $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$  si  $1 \leq i \leq n$ , les autres coefficients de  $A$  étant nuls, est semblable à  $\text{diag}(M(0,1), M(0,1), \dots, M(0,1))$ .

**Partie III -**

Dans toute cette partie,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n$  vérifiant  $(P_A)$ .

On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i)  $A$  est semblable à une matrice du type

$$\text{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \dots, M(\alpha_p, \beta_p)) \text{ avec } (\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ pour } 1 \leq k \leq p.$$

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par  $A$ .

iii) Tout sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 2 stable par  $A$  possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par  $A$ .

**III.A -** Dans cette section III.A, on montre que (i)  $\Rightarrow$  (ii).

III.A.1) Montrer que si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , le polynôme  $(X - \alpha)^2 + \beta^2$  ne possède que des racines simples complexes non réelles.

III.A.2) En déduire que (i)  $\Rightarrow$  (ii).

**III.B -** Dans cette section III.B, on montre que (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

On suppose donc que  $A$  vérifie (ii). Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 2 et stable par  $A$ . Soit  $(f_1, f_2)$  une base  $E$  que l'on complète en une base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

III.B.1) Montrer que dans la base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  a une matrice s'écrivant par blocs :

$$\begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ avec } A' \in \mathcal{M}_2.$$

III.B.2) Vérifier que  $A'$  ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que  $A'$  est semblable à une matrice du type  $M(\alpha, \beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

III.B.3) Montrer que  $E$  est inclus dans  $\text{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ .

III.B.4) Montrer que  $\text{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$  possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

III.B.5) En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties II.A.3 et II.A.4, montrer que  $E$  possède un supplémentaire stable par  $A$  dans  $\text{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ , puis conclure que (iii) est réalisé.

**III.C** - En raisonnant par récurrence, montrer que (iii)  $\Rightarrow$  (i).

**III.D** - *Exemple* :

Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

En admettant que  $A$  annule  $(X^2 + 1)(X^2 - 4X + 5)$ , déterminer une matrice inversible  $M$  de  $\mathcal{M}_4$  et des réels  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  tels que

$$A = M \begin{bmatrix} M(\alpha, \beta) & 0 \\ 0 & M(\alpha', \beta') \end{bmatrix} M^{-1}.$$

---

••• FIN •••

---