

**Centrale PC-1 2005**

**I-A.1/** Pour un diélectrique h-l-i, il n'y a ni charge

ni courant de surface. En  $z = 0$  :  $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_{tr}$

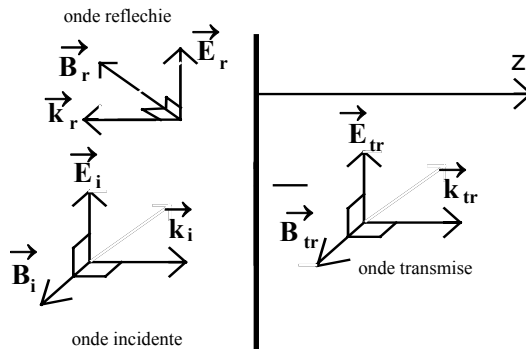
Les champs s'expriment de la façon suivante:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[j(\omega t - k_i \cdot z)] \quad \text{pour l'onde incidente}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[j(\omega t + k_r \cdot z)] \quad \text{pour l'onde réfléchie}$$

$$\vec{E}_{tr} = \vec{E}_{0tr} \exp[j(\omega t - k_{tr} \cdot z)] \quad \text{pour l'onde réfractée}$$

En  $z = 0$  en simplifiant  $\exp(j\omega t)$ :  $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0tr}$



**I-A.2/** Pour le champ  $\vec{B}$  en  $z = 0$ :  $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_{tr}$

Les expressions pour  $\vec{B}$  sont similaires; on aura donc :  $\vec{B}_{0i} + \vec{B}_{0r} = \vec{B}_{0tr}$ .

Mais pour des OPPM dans un l-i-h :  $\vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i$ ;  $\vec{B}_r = \frac{n_1}{c} (-\vec{e}_z) \wedge \vec{E}_r$ ;  $\vec{B}_{tr} = \frac{n_2}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{tr}$

D'où la relation supplémentaire :  $n_1 \vec{e}_z \wedge [\vec{E}_i - \vec{E}_r] = n_2 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{tr}$  qui implique  $n_1 [\vec{E}_i - \vec{E}_r] = n_2 \vec{E}_{tr}$ .

**I-A.3/** En projetant sur la direction de vibration du champ électrique, on obtient les facteurs

de réflexion en amplitude:  $r_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$  et en transmission  $t_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0tr}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

**I-B/**  $r_1 = r_{\text{air} \rightarrow \text{verre}} = -0,2$  et  $t_1 = t_{\text{air} \rightarrow \text{verre}} = +0,8$ ;  $r_2 = r_{\text{verre} \rightarrow \text{air}} = +0,2 = -r_1$  et  $t_2 = t_{\text{verre} \rightarrow \text{air}} = +1,2$ .

Le signe négatif pour  $r_1$  implique un changement de phase de  $\pi$  à la réflexion.

**I-C1/** Pour la première réflexion :  $s_0 = r_1 \cdot S_{\text{incident}}$ .

**I-C2/** Pour le rayon  $a_1$  :  $s_{a1} = t_1 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ . De même  $s_{a2} = t_1 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}} = t_1 \cdot (r_2)^3 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ .

On voit apparaître une suite qui s'exprime par :  $s_{aN} = t_1 \cdot t_2 \cdot (r_2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ .

**I-C3/** Pour le rayon  $b_1$  :  $s_{b1} = t_1 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ . De même  $s_{b2} = t_1 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ .

Cette fois la suite qui apparaît est :  $s_{bN} = (t_1 t_2)^2 \cdot (r_1)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ .

**I-C4/** Pour le rayon  $c_1$  :  $s_{c1} = t_1 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ . De même  $s_{c2} = t_1 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$ .

La suite est :  $s_{bN} = (t_1 t_2)^3 \cdot (r_2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ .

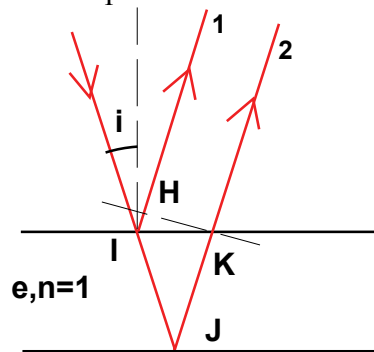
**I-C5/** A-N:  $s_{aN} = 0,96 \cdot (0,2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ ;  $s_{bN} = -0,922 \cdot (0,2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ ;  $s_{cN} = 0,885 \cdot (r_2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$ .

Vu la faible valeur du facteur de réflexion, on pourra ne considérer que le cas  $N = 1$

Pour éviter les rayons  $c_N$  on peut recouvrir la face arrière de la lame 2 d'un dépôt anti réfléchissant.

**II-A.1/** L'épaisseur des lames à faces parallèles, n'intervient pas sur l'angle  $i$ . On peut la considérer comme nulle pour simplifier. De même l'épaisseur de verre traversé est la même pour les rayons 1 et 2. Elle n'intervient donc pas sur la différence de chemin optique.

Les rayons 1 et 2 se coupent à l'infini. La différence de chemin optique se calcule en dessinant un plan d'onde commun.



$$(IJK) - (IH) = 2 \frac{e}{\cos i} - (2 \frac{e \sin i}{\cos i}) \sin i = 2e \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i}$$

(rappel : l'indice  $n$  vaut un), alors:  $\delta_{2/1} = 2e \cos i$ .

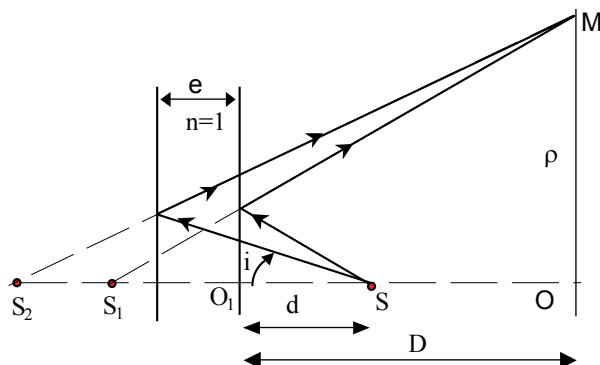
**II-A2/**

a/ les deux images de S sont telles que:

$$O_1 S_1 = O_1 S = d; O_1 S_2 = d + 2e, \text{ soit } a = S_1 S_2 = 2e.$$

La distance à l'écran sera :  $D_T = D + d + e$ .

b/ La figure d'interférence de 2 sources ponctuelles est constituée d'hyperboloïdes de révolution de foyers  $S_1, S_2$ . Sur l'écran perpendiculaire à  $S_1 S_2$ , les franges sont des cercles de centre O. Les franges ne sont pas localisées donc  $D$  quelconque  $> d$ .



c/ Différence de marche en M:  $\delta_{2/1} = S_2M - S_1M = \left( (D_T + a/2)^2 + \rho^2 \right)^{1/2} - \left( (D_T - a/2)^2 + \rho^2 \right)^{1/2}$ .

à l'ordre 1 en  $\rho^2$ :  $\delta_{2/1}(\rho) = \delta_{2/1}(0) + \rho^2 \left( \frac{\partial \delta_{2/1}}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=0} = a - \frac{a\rho^2}{2(D_T^2 - a^2/4)}$  et  $\varphi_{2/1} = \frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda}$

d/ interférences à 2 ondes:  $I = 2I_0[1 + \cos \varphi_{2/1}]$ , ici  $I(\rho) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{2} \rho^2 (D_T^2 - a^2/4)^{-1} \right) \right] \right]$

e/ Pour  $\rho = 0$ , l'ordre d'interférence vaut:  $p_0 = \frac{\delta_{2/1}(0)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} =$  entier si intensité maximale.

Les ordres d'interférence diminuent lorsqu'on s'écarte du centre, donc  $p_K = p_0 - K$ .

avec  $p_K = \frac{a}{\lambda} \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho_K^2 (D_T^2 - a^2/4)^{-1} \right] \Rightarrow \rho_K = \sqrt{2K(D_T^2 - a^2/4)/p_0}$ . On en déduit  $\frac{\rho_{K+1}}{\rho_K} = \sqrt{\frac{K+1}{K}}$

f/ A-N:  $\rho_2 = 1,414$ ,  $\rho_1 = 9,3$  mm et  $\rho_3 = 1,732$ ,  $\rho_1 = 11,4$  mm.

Connaissant  $\rho_1 = 6,6$  mm on en déduit:  $a = \frac{(D+d)^2}{\rho_1^2/2\lambda - (D+d)} = 29,9$  mm  $\Rightarrow$   $e = 15,0$  mm.

Les anneaux sont relativement larges, la précision est peu importante.

g/ Chaque point de la source large fournit une figure d'interférence. Les figures d'interférence sont identiques sauf que les centres ne coïncident pas. En augmentant la taille, un brouillage se produira.

### II-A3/

a/ On a obtenu en IIA.1/  $\delta_{2/1} = 2e \cos i$ .

b/ Seule l'inclinaison des rayons intervient, on peut prévoir que la figure d'interférence sera faite d'anneaux. Tous les points d'une source étendue donneront la même figure d'interférence, en employant une source large la luminosité des franges est renforcée.

c/ Interférence à deux ondes:  $I(i) = 2I_0[1 + \cos(2e \cdot \cos i)]$

II-A4/ a/ La lentille forme dans son plan focal la figure d'interférence à l'infini. Or les rayons qui arrivent en M ont l'inclinaison  $i \approx \tan i = \rho/f'$ .

Donc  $\delta_{2/1} = 2e \cos i \approx 2e[1 - \rho^2/2f'^2]$ .

b/ Au centre F de la figure on a  $\rho = 0$  donc  $p_0 = 2e/\lambda$ .

Si  $p_0$  entier, l'anneau brillant n° K correspond à  $p_K = p_0 - K$ .

Donc  $\rho_K = \sqrt{2f'^2 K/p_0} = f' \sqrt{K\lambda/e}$ .

c/ Le diamètre de l'anneau est  $d_K = N_K \ell = 2f' \sqrt{2K/p_0}$

On en déduit que l'épaisseur est:  $e = K\lambda / (N_K \ell / 2f')^2$ .

d/ A-N:  $e = 15,2$  mm.

e/ Le pixel est le quantum de longueur,  $\Delta N_1 = \pm 1$  et  $\frac{\Delta e}{e} = 2 \frac{\Delta N_1}{N_1} \Rightarrow \Delta e = \pm 2$  mm précision médiocre.

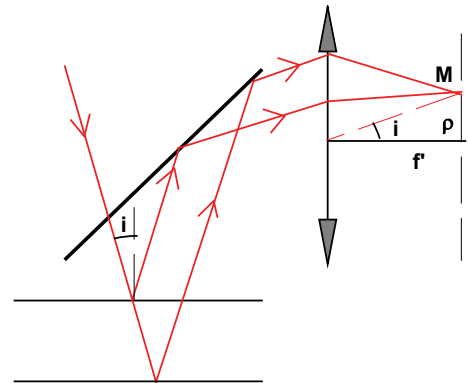
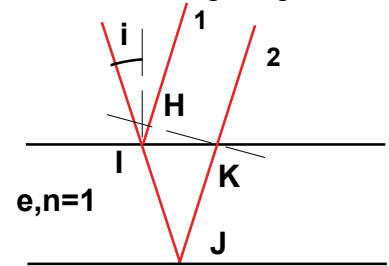
f/ Il faut augmenter  $N_1$  donc à e donnée la distance focale  $f'$  doit augmenter.

g/ Avec une source ponctuelle les franges ne sont pas localisées et le rayon des anneaux est donné par la relation obtenue en II-A2f/ :  $\rho_K = \sqrt{2K(D_T^2 - a^2/4)/p_0} \approx \sqrt{K\lambda(D_T^2 - e^2)/e}$  avec  $D_T = D+d+e$ .

L'énoncé ne donne pas la distance d de la source primaire à la lame  $L_1$  de la cavité.

Les anneaux étant 4 fois plus grands :  $\rho_K = 4f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}}$  on prendra  $D_T = \sqrt{16f'^2 + e^2} \approx 4f' = 200$  mm

h/ A partir de :  $\frac{1}{SA_2} = \frac{1}{SA_1} + \frac{1}{f'}$  et de  $\gamma = \frac{SA_2}{SA_1}$  on est conduit à:  $-\gamma + 1 = \frac{SA_2}{f'}$ ,



C'est à dire que pour un grandissement maximum il faut  $A_2$  le plus éloigné du foyer, soit  $\overline{SA_2} = 2f'$  et l'abscisse de l'objet est alors :  $\overline{SA_1} = -2f'$  avec pour grandissement  $\gamma = -1$ .

i/ L'objectif fait l'image de la figure formée à la distance  $4f'$ , il est donc à  $6f'$  ( $-d?$ ) de la cavité.

**II-B1/** On a obtenu en II-A4a/  $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{de}{e} - \frac{\sin i di}{\cos i}$  donc à p constant  $\frac{de}{e} = \frac{\sin i di}{\cos i}$

L'anneau voit son rayon diminuer lorsque e diminue. (rem:  $p_0$  dépend de e, donc quelconque ici)

On peut approximer :  $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\sin i}{\cos i} \Delta i = \frac{\rho}{f'} \Delta i \approx \frac{\rho}{f'} \frac{\Delta \rho}{f'}$  (où  $f'$  doit être remplacé par  $f'_{eq}$ ).

**II-B2/**

a/ La figure d'interférence est constituée d'anneaux concentriques, l'axe vertical est un axe de symétrie. Il y absence de symétrie parfaite à cause du centrage imparfait, des défauts de parallélisme, de qualité des capteurs, de non ponctualité de la source, etc...

Malgré l'absence de symétrie rigoureuse, le 1<sup>er</sup> anneau est décelable par son amplitude maximale.

b/ Le verre s'échauffe, donc se dilate et la cavité a une épaisseur qui diminue.

c/ D'après l'étude précédente les anneaux rentrent vers le centre. Le profil A est la référence, puisque les maxima sont plus éloignés du centre.

**II-B3/** On peut estimer les diamètres en pixels : avant :  $118 - 54 = 64$  et après :  $108 - 62 = 46$ .

Soit alors  $r_{1\text{avant}} = 736 \mu\text{m}$  et  $r_{1\text{après}} = 529 \mu\text{m}$ .

**II-B4/** D'après les questions II-A4c/  $\rho_K = f' \sqrt{K\lambda/e}$  et II-B1/  $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\rho}{f'} \frac{\Delta \rho}{f'}$

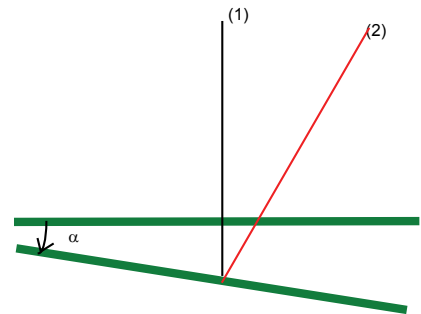
alors pour l'anneau  $K = 1 \Rightarrow \frac{\Delta e}{e} = \sqrt{\lambda/e} \frac{r_{1\text{avant}} - r_{1\text{après}}}{f'}$  soit  $\Delta e = \frac{r_{1\text{avant}} - r_{1\text{après}}}{r_{1\text{avant}}} \lambda$ . A-N:  $\Delta e = 178 \text{ nm}$ .

**II-B5/** La durée de l'excitation est environ  $T \approx 1000 \text{ ms}$ .

On trace les asymptotes à  $t = 0$  et à  $t = \infty$ , leur intersection donne  $\tau \approx 450 \text{ ms}$ .

**III-A1/** En incidence normale, les rayons se coupent sur  $L_2$ . Les franges sont localisées sur  $L_2$ . Si l'incidence n'est pas exactement normale, alors l'intersection est au voisinage de  $L_2$ .

Dans le cas d'une source étendue la différence de marche dépend de la position du point d'émission dans la source. Si la source n'est pas cohérente spatialement les franges disparaîtront. La source doit être faiblement étendue.



**II-A2/** La différence de marche est  $\delta_{2/1} = 2 \cdot e(x,y)$ .

Donc l'intensité en  $M(x,y)$  vaut  $I(x,y) = \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{4\pi e(x,y)}{\lambda}\right) \right]$  si  $I_0 =$  intensité maximale

**II-A3/** On peut écrire :  $e(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos}\left(\frac{2I(x,y)}{I_0} - 1\right) + m \frac{\lambda}{4}$

**III-B1/** Avant : la lame est immobile; pendant : la lame se dilate et l'épaisseur  $e(x,y)$  diminue; après la lame se rétracte et l'épaisseur augmente.

D'après le graphe figure 11, le début de l'excitation est situé à la date  $t_{\text{debut}} = 300 \text{ ms}$  tandis que la fin (reconnaissable au point de rebroussement) à la date  $t_{\text{fin}} = 1300 \text{ ms}$ .

Au repos le point étudié est sombre. Pendant l'excitation on peut compter le passage de 3 franges brillantes aux dates 400, 500 et 1100 ms. Dans la phase de relaxation on compte le passage par 3 franges brillantes aux dates 1400, 1600 et 2000 ms, avant de reprendre l'intensité nulle du départ.

**III-B2/**

a/ On part d'une intensité nulle,  $e_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos}(-1) + m \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{4}$ . Puis  $e(x,y)$  diminue.

Pour  $t \in [t_{\text{debut}} ; 400 \text{ ms}]$  on a  $\Delta e = e - e_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos} \xi(t) - \frac{\lambda}{4}$  en posant  $\xi(t) = \frac{2I(x,y,t)}{I_0} - 1$

b/ On arrive pour  $t = 400 \text{ ms}$  à  $\Delta e = -\lambda/4$ , ce qui revient à faire  $m \rightarrow m-1$  dans la formule  $e(x,y)$ .

Alors  $t \in [400 \text{ ms} ; 500 \text{ ms}]$ , on aura ainsi :  $\Delta e = e - e_0 = -\frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) - \frac{\lambda}{4}$ .

le signe "-" tient compte que  $I(x,y)$  décroît et que  $\Delta e$  décroît aussi ( $t = 500 \text{ ms}$ ,  $\Delta e = -3\lambda/4$ )

**III-B3/** Pour  $t \in [t_{\text{debut}} ; t_{\text{fin}}]$  on peut choisir  $\Delta e = \pm \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) - (N_1 + 1) \frac{\lambda}{4}$

avec  $N_1$  le nombre de franges brillantes ayant défilé en M et "+" si  $I(x,y)$  croissante dans le temps.

**III-B4/** Soit  $e_f$  l'épaisseur au temps  $t_{\text{fin}}$  :  $e_f = e_0 - \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t_f) - (N_{1\text{max}} + 1) \frac{\lambda}{4}$

Pour  $t > t_f$ , l'épaisseur augmente à partir de la valeur  $e_f$ . En reprenant le raisonnement précédent:

pour  $t \in [1300 \text{ ms} ; 1400 \text{ ms}]$ ,  $e - e_f = -\frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t_f)$

pour  $t \in [1400 \text{ ms} ; 1500 \text{ ms}]$ ,  $e - e_f = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t_f) + \frac{\lambda}{4}$

etc...  $e - e_f = \mp \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t_f) + N_2 \frac{\lambda}{4}$

$N_2$  nombre de franges qui ont défilé depuis la fin de l'excitation et "-" si  $I(x,y)$  croissante avec  $t$ .

Ceci conduit à :  $e - e_0 = \mp \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) - (N_{1\text{max}} + 1 - N_2) \frac{\lambda}{4}$ .

**III-B5/** Le graphique figure 12 indique  $d_{\text{max}} = 850 \text{ nm}$ . On a  $d_{\text{max}} = -\Delta e_{\text{max}}$

La figure 11 indique une variation de  $\lambda/4$  pour chaque pseudo segment de la courbe. Soit  $5\lambda/4$  plus une fraction de courbe que l'on peut estimer à  $1/2$  segment. Donc en tout  $|\Delta e_{\text{max}}| = 11\lambda/8 = 870 \text{ nm}$ .

**IV-A/** En différentiant la définition:  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda}$  on obtient  $d\phi = \frac{4\pi v dt}{\lambda}$

Et considérant que  $dt$  est équivalent à  $1/F$  :  $\Delta\phi = \frac{4\pi v}{\lambda F}$ . A-N:  $\Delta\phi \approx 0,4 \text{ rad/s}$ .

**IV-B/** En différentiant:  $d(\Delta\phi) = \frac{4\pi dv}{\lambda F} = \frac{4\pi a dt}{\lambda F}$ ; donc  $\Delta(\Delta\phi) = \frac{4\pi a}{\lambda F^2}$  et  $\frac{\Delta(\Delta\phi)}{\Delta\phi} = \frac{a}{vF}$ .

Si le déplacement est régi par la loi :  $d = d_m [1 - \exp(-t/\tau)]$  alors  $\frac{\Delta(\Delta\phi)}{\Delta\phi} = \frac{-1}{\tau F} = -5\%$

**IV-C/**  $I_0$  est l'intensité en M en absence d'interférence. Cette intensité peut dépendre de M car la courbure de la lame d'entrée agit comme une lentille; certains peuvent être plus éclairés que d'autres. La fonction  $V(x,y)$  est la visibilité des franges en M. Il provient, pour une lumière monochromatique, de la différence d'intensité des faisceaux qui interfèrent.

**IV-D/** Le facteur  $R_1$  vaut  $R_1 = \frac{\cos[\phi(x,y) + 2\Delta\phi] - \cos[\phi(x,y) - 2\Delta\phi]}{\cos[\phi(x,y) + \Delta\phi] - \cos[\phi(x,y) - \Delta\phi]}$

Soit en utilisant la trigo de base:  $R_1 = \frac{-2 \sin[\phi(x,y)] \cdot \sin[2\Delta\phi]}{-2 \sin[\phi(x,y)] \cdot \sin[\Delta\phi]} = 2 \cos[\Delta\phi]$ .

**IV-E/** Le facteur  $R_2$  vaut  $\frac{\cos[\phi(x,y) + 2\Delta\phi] + \cos[\phi(x,y) - 2\Delta\phi] - 2 \cos[\phi(x,y)]}{\cos[\phi(x,y) + \Delta\phi] - \cos[\phi(x,y) - \Delta\phi]}$

Avec la même trigo:  $R_2 = \frac{2 \cos[\phi(x,y)] \cdot \{\cos[2\Delta\phi] - 1\}}{-2 \sin[\phi(x,y)] \cdot \sin[\Delta\phi]}$ , soit:  $R_2 = \frac{2 \sin[\Delta\phi]}{\tan[\phi(x,y)]}$

**IV-F/** On trouve en éliminant le décalage  $\Delta\phi$  que :  $\tan[\phi(x,y)] = \frac{2\sqrt{1 - 0,25 \cdot R_1^2}}{R_2}$ .

**IV-G/** L'avantage est de permettre une mesure en temps réel des déformations de la lame.