Notations. Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est-à-dire à 2 lignes et 2 colonnes. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$, on rappelle la définition de sa *trace* $\mathrm{Tr}(M) = a + d$ et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_M \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto \det(x\mathbb{I}_2 - M),$$

où $\mathbb{I}_2$ désigne la matrice identité et det le déterminant d'ordre 2.
En outre, on identifie les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
On pose donc, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle A d'ordre 2 est *orthogonale* si, et seulement si, ${}^tA\,A = \mathbb{I}_2$. L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté O_2.

On désigne par S_2 l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Démontrer que si deux matrices de $\mathbf{E}$ sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

I.A.2) Démontrer que $\Phi : \ (M_1, M_2) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tM_1\, M_2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{E}$. Pour la suite du problème, $\mathbf{E}$ pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3) Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathbf{E}$, on a $|\det(M)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}({}^tMM)$. Quand y a-t-il égalité ?

I.A.4) Pour $M \in \mathbf{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\chi_M(x)$ en fonction de x, $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$. En conclure que 1 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(M) = 1 + \det(M)$.

I.B - La décomposition UDV

On donne dans cette question $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de $\mathbf{E}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

I.B.1) Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\varphi(\theta) = \mathrm{Tr}(MP(\theta))$.

Démontrer que φ est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ en lequel φ atteint son maximum. En choisissant alors un tel θ_1 et en considérant $\varphi'(\theta_1)$, démontrer que $MP(\theta_1)$ est une matrice symétrique.

I.B.2) En déduire que $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où D est une matrice diagonale de $\mathbf{E}$.

Remarque : *on a établi que toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $M = UDV$, où D est diagonale et U, V orthogonales.*

I.B.3) **Exemple :** décomposer la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

I.C - Soit $A \in \mathbf{E}$, U et V des matrices orthogonales d'ordre 2 et $B = UAV$. Démontrer que ${}^tA\,A$ et ${}^tB\,B$ sont semblables.

On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$ vérifie en outre $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

Partie II - Les ensembles $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$

On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ telles que $\|MX\| \leqslant \|X\|$ pour tout vecteur-colonne $X \in \mathbb{R}^2$.

II.A - Reformuler la définition de $\mathscr{R}$ en utilisant la notion de *norme subordonnée.*

II.B -

II.B.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$, démontrer que $(a,\, b,\, c,\, d)$ appartient $[-1, 1]^4$.

Démontrer que $\mathscr{R}$ est un compact de $\mathbf{E}$.

Si $(M_1,\, M_2) \in \mathbf{E}^2$, *on définit le* segment $[M_1 M_2]$ *comme l'ensemble des matrices de la forme* $(1-t)M_1 + tM_2$, *où* t *décrit* $[0, 1]$.

II.B.2) Démontrer que $\mathscr{R}$ est aussi un *convexe* de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire que, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathscr{R}$, le segment $[M_1 M_2]$ est inclus dans $\mathscr{R}$.

II.C -

II.C.1) Démontrer que $M \in \mathscr{R} \iff \forall\, X \in \mathbb{R}^2, \quad {}^tX\, {}^tM\, MX \leqslant {}^tX\, X.$

II.C.2)

a) Si $M \in \mathbf{E}$, justifier le fait que le polynôme caractéristique de ${}^tM\, M$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec λ_1 et λ_2 réels.
Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.

On pourra considérer des expressions de la forme ${}^tX\, {}^tM\, MX$.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{R}$ si, et seulement si, les valeurs propres de ${}^tM\, M$ appartiennent à $[0, 1]$.

II.D - Déduire en particulier de **II.C.2.a** que

$$M \in \mathscr{R} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 1 + (\det(M))^2 \\ \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 2 \end{array} \right.$$

II.E - On définit $\mathscr{S}$ comme :

$$\mathscr{S} = \left\{ M \in \mathscr{R} \;\middle|\; \exists\, X_0 \in \mathbb{R}^2,\ X_0 \neq 0,\ ||MX_0|| = ||X_0|| \right\}.$$

II.E.1) En reprenant les calculs de **II.C.2.a**, démontrer que M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda)(x-1)$, où $\lambda \in [0,1]$.

II.E.2) Si $M \in \mathbf{E}$, on l'écrit sous la forme $M = P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

a) Déterminer les valeurs propres de ${}^tM\,M$ en fonction de α et β.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, il existe U et V, matrices orthogonales d'ordre 2 et $\gamma \in [-1,1]$ tels que $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$.

II.E.3) En déduire que, si M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, il existe des matrices orthogonales W et W' d'ordre 2 telles que M appartienne au segment $[WW']$.

On pourra montrer d'abord que si M est de la forme $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\gamma \in]-1,1[$, on peut choisir W et W' orthogonales et diagonales telles que M appartienne au segment $[WW']$.

II.F - On désigne par $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et par $\mathbf{E}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

II.F.1) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{E}$ orthogonaux au sens du produit scalaire Φ défini en **I.A.2.**

II.F.2) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant $+1$ et que $\mathbf{E}_2$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3) Lorsque M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, déduire de ce qui précède le nombre de segments $[WW']$ – où W et W' sont orthogonales – contenant M.

Partie III - Définition de l'ensemble $\mathscr{H}$

III.A -

III.A.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, démontrer que que $M \in \mathscr{S}$ *implique*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ vérifiant cette dernière relation.

III.A.2)

a) Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient-elle à $\mathscr{S}$?

b) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si $\mathrm{Tr}({}^tM\,M) \leqslant 2$.

III.B -

III.B.1) Si $(A, B) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, calculer $\det(A + B)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, avec $M_1 \neq M_2$ on définit la *droite affine* (M_1M_2) comme l'ensemble des matrices de la forme $(1 - t)M_1 + tM_2$, où t décrit $\mathbb{R}$. Dans la suite, on l'appellera *droite* (M_1M_2).

III.B.2) Démontrer que, si W et W' sont des matrices orthogonales éléments de $\mathbf{E}$, telles que $\det(W) = +1$ et $\det(W') = -1$, la droite (WW') est incluse dans $\mathscr{H}$. Réciproquement, $\mathscr{H}$ est-elle réunion de droites de cette forme ?

Partie IV - Représentation graphique de $\mathscr{H}$

IV.A - Si $M \in \mathbf{E}$, on rappelle que le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, avec $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$. Pour fixer les idées, on suppose $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

On suppose $M \neq 0$. Déterminer en fonction de λ_1 et λ_2 le nombre de réels t **positifs** tels que $tM \in \mathscr{H}$. **On en trouvera « en général » deux, et on interprétera les cas particuliers.**

On étudie à partir de cette question l'intersection de $\mathscr{H}$ avec certains sous-espaces vectoriels de E. On commence par des exemples de plans vectoriels.

IV.B - Soit $\mathbf{P}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_1(x,\, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.B.1) Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans $\mathbf{P}_1$.

IV.B.2) **Dans cette question, on identifie $\mathscr{M}_1(x,\, y)$ avec le point $(x,\, y)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a) Démontrer que $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ est la réunion de deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$.

b) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_1$ dans le plan $\mathbf{P}_1$.

IV.C - Soit $\mathbf{P}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_2(x,\, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Soit $(u,\, v) \in \mathbb{R}^2$; on ne demande pas de vérifier que la relation du **III.A.1** implique

$$\mathscr{M}_2(x,\, y) \in \mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2 \iff x^2y^2 - 2(x^2+y^2-1) = 0$$

Étudier et représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_2$ dans le plan $\mathbf{P}_2$ (*on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable y*).

IV.D - Exemple d'intersection de $\mathscr{H}$ avec un sous-espace de dimension 3

On désigne par $\mathbf{S}_2$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathbf{S}_2$ appartient à $\mathscr{H}$ si, et seulement si, elle admet une valeur propre égale à $+1$ ou à -1.

On admet qu'une base orthonormale de $\mathbf{S}_2$ est $\mathscr{B} = (M_1,\, M_2,\, M_3)$, avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \ M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \ M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

IV.D.2) En écrivant une matrice de $\mathbf{S}_2$ sous la forme $xM_1 + yM_2 + zM_3$, décrire l'ensemble C_a des matrices de $\mathbf{S}_2$ admettant le réel donné a comme valeur propre. En déduire une description de $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$.

IV.D.3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N = P(\theta)M(x,\, y,\, z)P(\theta)^{-1}$; démontrer que c'est une matrice de la forme $M(u,\, v,\, w)$ et exprimer $(u,\, v,\, w)$ en fonction de $(x,\, y,\, z)$. Interpréter certains des résultats de la question **IV.D.2**.

IV.D.4) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{S}_2$.

• • • FIN • • •
