Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière MP

Les parties 2, 3 et 4 de ce problème sont totalement indépendantes, elles proposent trois applications du résultat démontré dans la partie préliminaire 1.

Définitions et notations

Pour $T \in \mathbf{R}^{*+}$, on note C_T^0 l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, continues et T-périodiques.

Pour $T \in \mathbf{R}^{*+}$, on appelle coefficients de Fourier complexes d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux et T-périodique, les nombres

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\pi\frac{2int}{T}}\mathrm{d}t,\ n \in \mathbf{Z}.$$

On pourra utiliser la notation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions uniformément convergente sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \bar{I}$.

On note $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \ell_n$.

Démontrer que $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, on note ℓ sa limite.

Montrer que $U(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

I.B - Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes, continue par morceaux et T-périodique et soit $k \in \mathbf{Z}$; étudier $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}g(x)\mathrm{d}x$ (on distinguera les cas $kT \in 2\pi\mathbf{Z}$ et $kT \notin 2\pi\mathbf{Z}$).

I.C - Soit $f \in C_{2\pi}^0$, de classe C^1 par morceaux et soit g une fonction continue par morceaux et T-périodique.

I.C.1) On suppose $\dfrac{T}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$.

Montrer que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$ et que cette limite vaut $c_0(f)c_0(g)$.

I.C.2) On suppose $\dfrac{T}{2\pi} \in \mathbf{Q}$. On pose $\dfrac{T}{2\pi} = \dfrac{p}{q}$ irréductible.

Montrer que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$ admet une limite quand $t \to +\infty$ et exprimer cette limite à l'aide des coefficients de Fourier complexes de f et g.

Lorsque les coefficients de Fourier complexes de f et g sont tous des réels positifs, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant c_0(f)c_0(g)$.

Partie II - Équation différentielle

II.A - Soit ϕ appartenant à C_T^0, et soit $k \in \mathbf{Z}$.

On note e_k la fonction $x \mapsto e_k(x) = \mathrm{e}^{-\pi\frac{2ikx}{T}}$. Comparer $c_k(\phi)$ et $c_0(e_k\phi)$.

II.B - Soient a et b deux fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$.

On suppose que l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ possède une solution y_0 sur $\mathbf{R}$, non nulle et T-périodique avec $\dfrac{T}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$.

Prouver que y_0 est solution de l'équation différentielle $y'' + c_0(a)y' + c_0(b)y = 0$.

Partie III - Épicycloïde

Soient R et r deux réels strictements positifs.

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct, on considère le cercle (C_0) de centre O et de rayon R, le cercle (C) de centre $\Omega(R+r,0)$ et de rayon r et le point $A(R,0)$. On pose $q = \dfrac{R}{r}$.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on considère le cercle $C(t)$, de rayon r, dont le centre, noté $\Omega(t)$, a pour affixe $(R+r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

- version du 19 mars 2007 11h34

III.A - Définition de l'épicycloïde

III.A.1) Montrer que (C_0) et $(C(t))$ sont tangents et déterminer l'affixe $h(t)$ de leur point de contact $H(t)$.

III.A.2) Soit $M(t)$ le point de $(C(t))$ tel que $(\overrightarrow{\Omega(t)H(t)}, \overrightarrow{\Omega(t)M(t)}) = qt$. Déterminer l'affixe $z(t)$ de $(M(t))$.

On appelle épicycloïde $\mathcal{E}$ l'arc paramétré décrit par $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$.

Remarque : l'épicycloïde $\mathcal{E}$ est la courbe décrite par le point A lié au cercle (C) lorsque le cercle (C) roule sans glisser sur le cercle (C_0).

III.B - Propriétés de l'épicycloïde

Dans cette section, $q \in \mathbf{Q}$.

III.B.1) Justifier l'existence d'une fonction périodique ρ à valeurs strictement positives, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et d'une fonction θ à valeurs réelles, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, telles que $\forall t \in \mathbf{R},\ z(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$.

Préciser une période de la fonction ρ.

III.B.2) Étudier et représenter la courbe lorsque $q = \dfrac{5}{2}$.

III.B.3) Montrer que l'épicycloïde est formée d'arcs isométriques (appelés arches) se rejoignant en des points de rebroussements. Déterminer les affixes de ces points.

III.B.4) Calculer la longueur d'une arche.

Lorsque q est entier, calculer la longueur totale et l'aire de l'épicycloïde en fonction de la longueur et l'aire du cercle (C_0) et du nombre q.

III.C - Dans cette section $q \notin \mathbf{Q}$.

On montre que l'épicycloïde est dense dans la couronne $\mathcal{C}$ délimitée par le cercle (C_0) et le cercle (C_1) de même centre et de rayon $(R+2r)$.

III.C.1) Soit $m \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta(x)}\mathrm{d}x = 0$.

Indication : on pourra exprimer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ en fonction de $z(x)$ et $\rho(x)$ et utiliser la question 3 de la partie préliminaire.

Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta(x)}\mathrm{d}x = 0$ pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{Z}$.

III.C.2) Soit P un polynôme et Q un polynôme trigonométrique, déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P(\rho(x))Q(\theta(x))\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\mathrm{d}x$, lorsque f est une fonction définie et continue sur $[R, R+2r]$ et g une fonction continue 2π-périodique.

III.C.3) Soient $(\rho_0, \varepsilon) \in [r, R+2r]\times\mathbf{R}^{*+}$ tels que $[\rho_0-\varepsilon, \rho_0+\varepsilon] \subset [R, R+2r]$ et soit $(\theta_0, \eta) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{*+}$.

On considère la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points M d'affixe z tels que $|z| \in [\rho_0-\varepsilon, \rho_0+\varepsilon]$ et $\mathrm{Arg}(z) \in [\theta_0-\eta, \theta_0+\eta]$.

En considérant des fonctions f et g bien choisies, montrer que $\mathcal{P}\cap\mathcal{E} \neq \emptyset$.

III.C.4) En déduire que l'épicycloïde est dense dans la couronne $\mathcal{C}$.

Partie IV - Problème de visibilité

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct, on considère un observateur placé à l'origine et, en tout point M de coordonnées entières autre que l'origine, on place un arbre représenté par un carré « plein » de côté $2r \in]0, 1/2[$ centré en M ; on appelle forêt, notée $\mathcal{F}$, l'ensemble de ces carrés.

Le but de cette partie est de prouver l'existence d'un réel $R > 0$ tel que, dans toute direction, l'observateur voit un arbre situé à une distance inférieure ou égale à R.

IV.A -

IV.A.1) Soit h la fonction créneau, paire et 1-périodique définie sur $[0, 1/2]$ par $h(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant r$, 0 sinon.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto h(t)h(x-t)$ est intégrable sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Soit u définie sur $\mathbf{R}$ par $\displaystyle u(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(x-t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que u est paire, 1-périodique, et que $\displaystyle u(x) = \int_{x-r}^{x+r} h(y)\mathrm{d}y$. En déduire que u est continue et C^1 par morceaux. Vérifier que tous ses coefficients de Fourier complexes sont positifs. Calculer $c_0(u)$.

IV.A.2) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, montrer que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x$$

admet une limite finie strictement positive notée $\ell(\theta)$ lorsque $t \to +\infty$.

IV.A.3) Pour $t \in \mathbf{R}$, montrer que la fonction

$$\theta \mapsto \int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x$$

est continue sur $\mathbf{R}$.

IV.A.4) En déduire l'existence d'un réel R tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x > 1.$$

Prouver qu'il existe $x \in]0, R]$ tel que $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) \neq 0$ et conclure.

IV.B - Algorithmique

IV.B.1) Pour $(r,\theta) \in \mathbf{R}^2$, on note $A(r,\theta)$ le point d'affixe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Soit $I = \left\{r \in \mathbf{R}^{*+} \;\middle|\; \forall\theta \in [0, 2\pi],\ \mathcal{F} \cap [O, A(r,\theta)] \neq \emptyset\right\}$.

Montrer que I est un intervalle non vide, on note R_0 sa borne inférieure, montrer que $R_0 > 0$.

L'intervalle I est-il ouvert ? fermé ?

IV.B.2) On suppose que l'on dispose d'une fonction tri qui prend en argument une liste de couples de réels et retourne la liste triée dans l'ordre croissant des premiers éléments des couples.

Décrire un algorithme donnant un encadrement de R_0 par deux entiers consécutifs.

IV.C - Arbres ronds

Que peut-on dire si les arbres sont représentés par des disques fermés ?

••• FIN •••
