

# Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Filière PC

Dans tout le problème, on notera  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

## Partie I -

**I.A -**

I.A.1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $x \mapsto x^n f(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $m_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$ .

On admettra dans toute la suite de ce problème que  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ .

I.A.2) Déterminer  $m_1$ .

I.A.3) Lorsque  $n \geq 2$ , donner une relation de récurrence liant  $m_n$  et  $m_{n-2}$ . En déduire une expression de  $m_n$  en fonction de  $n$ .

**I.B -** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx$  est convergente et déterminer sa valeur en fonction de  $t$ .

On pourra considérer la forme canonique du trinôme  $x \mapsto -\frac{x^2}{2} - tx$ .

**I.C -**

I.C.1) Le réel  $t$  étant fixé, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$

I.C.2) Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

I.C.3) Retrouver la valeur de  $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx$  obtenue précédemment.

## Partie II -

Dans toute la suite du problème, on note  $E$  l'ensemble des fonctions  $g$  continues sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif  $M(g)$  et un réel strictement positif  $\lambda$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq M(g)f(\lambda x)$ .

**II.A -** Démontrer que  $E$  muni des lois  $+$  et  $\cdot$  usuelles est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , qui contient  $f$ .

**II.B -** Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $E$ . On note  $u * v$  l'application définie, pour tout réel  $x$  pour lequel la formule a un sens, par

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t) dt.$$

II.B.1) Démontrer que  $u * v$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

II.B.2) Démontrer que  $u * v = v * u$ .

II.B.3) Déterminer  $(f * f)(x)$ .

II.B.4) Démontrer que  $u * v$  appartient à  $E$  (on utilisera le résultat de la question précédente).

**II.C -** Soit  $u \in E$ . On définit l'application  $\hat{u}$  par :  $\hat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} u(x) dx$ .

II.C.1) Montrer que  $\hat{u}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

II.C.2) Montrer que  $\hat{u}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer une expression de  $\hat{u}'(t)$  et  $\hat{u}''(t)$  à l'aide d'intégrales.

**II.D -** Dans cette section  $D$  seulement, on admet le résultat suivant :

Soit  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une application continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe deux applications  $h_1$  et  $h_2$  continues sur  $\mathbb{R}$  et intégrables sur  $\mathbb{R}$  avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq h_1(x)h_2(y)$$

alors  $\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$  et  $\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$  sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.

Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $E$ .

II.D.1) Démontrer qu'il existe une constante  $a > 0$  telle que pour tout couple  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  :

$$-t^2 - (x - t)^2 \leq -a(t^2 + x^2).$$

II.D.2) Démontrer la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} u * v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} v(x) dx.$$

II.D.3) Démontrer la relation, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-x\theta} \cdot (u * v)(x) dx = \widehat{u}(\theta) \cdot \widehat{v}(\theta).$$

on pourra utiliser l'égalité

$$\left(t + \frac{\theta}{2\gamma}\right)^2 + \left(\left(x + \frac{\theta}{\gamma}\right) - \left(t + \frac{\theta}{2\gamma}\right)\right)^2 = t^2 + (x - t)^2 + \frac{\theta x}{\gamma} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}.$$

Dans la suite de ce problème, on considère le sous ensemble  $E_1$  de  $E$  dont les éléments sont les fonctions  $h \in E$  telles que  $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1$ . On notera que la fonction  $f$  de la partie I est un élément de  $E_1$ . À toute fonction  $h \in E_1$ , on associe la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la récurrence suivante :

$$h_1 = h \text{ et pour tout } n \geq 2, h_n = h_{n-1} * h_1.$$

On remarquera que la fonction  $h_n$  est alors élément de  $E$  d'après II B 4.

L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

### Partie III -

III.A - Soit  $h$  un élément de  $E_1$ .

III.A.1) Démontrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'éléments de  $E_1$ .

III.A.2) Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{h}_n(x)$  en fonction de  $\widehat{h}(x)$  et de  $n$ .

III.B - Dans cette question on étudie la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  associée à la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  étudiée dans la partie I (on a donc posé  $h = f$ ).

III.B.1) Déterminer une constante  $K_2$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = K_2 e^{-\frac{x^2}{4}}$ .

III.B.2) Déterminer une constante  $K_n$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = K_n e^{-\frac{x^2}{2n}}$ .

III.B.3) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$  en fonction de  $t \in \mathbb{R}$ .

III.C - Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} \cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

III.C.1) Démontrer que  $g \in E_1$ .

III.C.2) Montrer que la fonction  $g * g$  est paire. Donner pour  $x \geq 0$  l'expression de  $(g * g)(x)$  en fonction des valeurs de  $x$  : on distinguera deux intervalles pour  $x$ .

III.C.3) Démontrer que  $g_n$  est nulle en dehors d'un intervalle  $[-a_n, a_n]$  que l'on précisera.

III.C.4) Déterminer l'expression de  $\widehat{g}(t)$  en fonction de  $t$ .

III.C.5) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$  en fonction de  $t$ .

### Partie IV -

Soit  $h$  un élément de  $E_1$ . On note pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$M_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x) dx, M_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x) dx \text{ et } V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que la fonction  $\widehat{h}_n$  possède un développement limité à l'ordre 2 dont on précisera les coefficients à l'aide de  $M_{1,n}$  et  $M_{2,n}$ .

IV.A.2) En déduire que  $M_{1,n} = nM_{1,1}$  et  $V_n = nV_1$ .

IV.B - On suppose dans cette question que la fonction  $h$  est telle que  $M_{1,1} = 0$ .

Déterminer la limite de la suite  $\left(\widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

••• FIN •••