

Corrigé de Centrale PC 2007, Physique 1

Francis BROUCHIER

6 juin 2007

Partie I- Couleurs par « transparence »

I.A. Le spectre lumineux humainement visible.

I.A.1) La longueur d'onde des ondes lumineuses humainement visibles est comprise entre $0,4 \mu m$ pour le violet et $0,8 \mu m$ pour le rouge.

I.A.2) La fréquence est donnée par la relation : $f = c/\lambda$ soit pour la radiation violette $f_{violet} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hertz}$ et pour la radiation rouge : $f_{rouge} = 3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hertz}$.

I.B. Détermination de la permittivité relative complexe ε_r du milieu dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié.

I.B.1) La grandeur ω_0 est une pulsation qui s'exprime en rad/s . Elle représente la pulsation propre du mouvement de l'électron sous l'action de la force de rappel.

I.B.2) La force électromagnétique agissant sur l'électron peut s'écrire : $\vec{f}_{EM} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron est :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

I.B.3) a) La taille d'un atome est de l'ordre du nm alors que la longueur d'onde de la lumière visible est de l'ordre du μm . On peut donc considérer que l'atome est très petit devant la longueur d'onde et que les champs \vec{E} et \vec{B} ont la même valeur à l'intérieur de l'atome.

b) La vitesse \vec{v} de l'électron n'est pas relativiste $v \ll c$. Comme l'atome est plein de vide on peut considérer que le champ électromagnétique est pratiquement celui du vide avec $E = B/c$. Ainsi la force magnétique est négligeable devant la force électrique : $|\vec{v} \wedge \vec{B}| = |\vec{v}/c \wedge \vec{E}| \ll |\vec{E}|$.

c) Comme l'énoncé dit que l'on étudie les "couleurs", une lumière colorée est une lumière monochromatique de pulsation fixe. La superposition de lumières monochromatiques peut aboutir à de la lumière "blanche". On

peut donc limiter l'étude à un champ électrique monochromatique. La superposition linéaire des divers champs pouvant engendrer un champ quelconque.

d) On montre qu'une onde électromagnétique à polarisation quelconque peut se mettre sous la forme de la somme de deux ondes polarisées rectilignement perpendiculaires entre elles. L'étude d'une onde polarisée rectilignement suffit donc pour obtenir le cas général.

I.B.4) a) Il s'agit d'un régime d'oscillations forcées.

b) En amplitude complexe les équations différentielles se transforment en équation algébriques où le symbole d/dt est remplacé par $j\omega$, ainsi de suite.

La relation fondamentale de la dynamique devient :

$$m[(j\omega)^2 + \gamma j\omega + \omega_0^2]\vec{r} = -e\vec{E}$$

$$\vec{r} = \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma.j\omega)}$$

I.B.5) a) \vec{r} est la distance de $+e$ à $-e$, le moment dipolaire élémentaire est donc $\vec{p} = -e\vec{r}$

b) Le vecteur polarisation \vec{P} vaut donc :

$$\vec{P} = n.\vec{p} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_0.\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma.j\omega}$$

$$\vec{P} = -\omega_p^2 \cdot \frac{\varepsilon_0\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma.j\omega}$$

I.B.6)a) Prenons un milieu de masse volumique de l'ordre de 1000 kg/m^3 et de masse molaire de l'ordre de 20 g , le nombre de moles est de l'ordre de $5.10^4/\text{m}^3$. Comme une mole contient en gros 6.10^{23} molécules on obtient : $n \sim 3.10^{28}/\text{m}^3$. Après un calcul approché on trouve $\omega_p \sim 3.10^{15}$

b) Cette pulsation est, en gros, dix fois supérieure aux pulsations de la lumière visible. La masse d'un proton ou d'un neutron est 1830 fois celle de l'électron. Le noyau est donc nettement plus massique que l'électron. Dans le système à deux corps formé du noyau et de l'électron on peut donc confondre le centre de masse de l'ensemble avec le centre du noyau. Le noyau est donc immobile.

I.B.7)a) La grandeur χ_e est la susceptibilité diélectrique complexe du milieu. Comme $\varepsilon_r - 1$ est sans dimension, il en est de même de χ_e .

b) Donnons les expressions de \vec{P} et χ_e :

$$\vec{P} = \varepsilon_0.\chi_e.\vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \frac{-\omega_p^2.\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma.j\omega}$$

$$\chi_e = \frac{-\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma.j\omega} \quad \chi_e(\omega = 0) = \frac{-\omega_p^2}{\omega_0^2}$$

On en déduit la valeur demandée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + \gamma/\omega_0 \cdot j\omega/\omega_0}$$

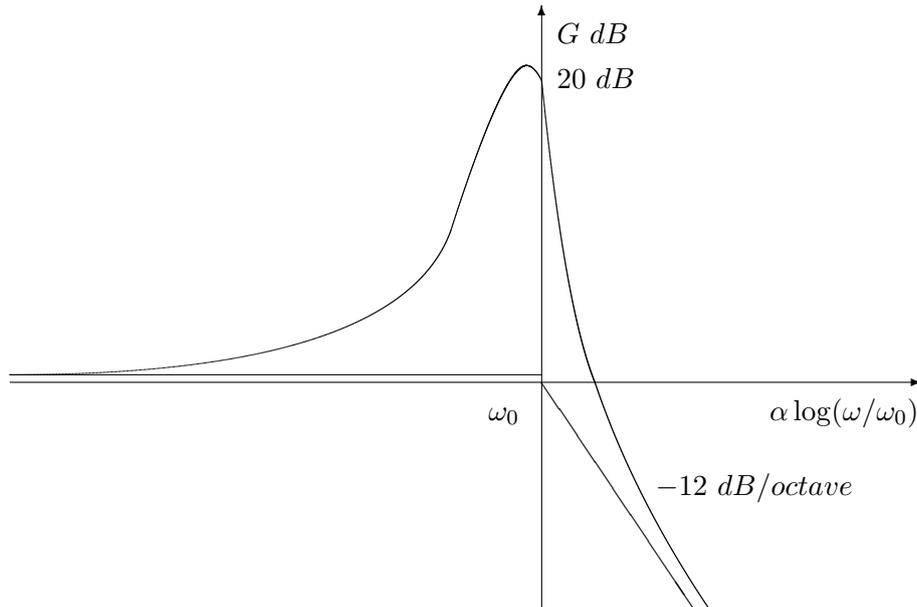
Il suffit de prendre $Q = \omega_0/\gamma$ pour obtenir la forme indiquée dans l'énoncé.

I.B.8 a) Le diagramme de BODE est la courbe représentant $GdB = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de $\alpha \cdot \log(\omega/\omega_0)$ où α est une constante d'échelle et où ω_0 est une pulsation arbitrairement choisie pour que le terme sous le logarithme soit sans dimension. Ici la pulsation ω_0 définie par l'énoncé convient parfaitement.

Pour avoir les asymptotes de cette courbe on fait d'abord tendre ω vers 0 et on voit que $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 1$ et donc $G \rightarrow 0$. L'asymptote pour ω petit est l'axe des "ω".

Pour ω grand $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow \omega_0^2/\omega^2$ et $G \rightarrow -20 \log(\omega/\omega_0)$. L'asymptote est la droite de pente $-12dB/octave$ passant par $\omega = \omega_0$.

Pour $\omega = \omega_0$ $|\underline{H}(j\omega_0)| = Q = 10$ et $G = 20 dB$. Il y a donc un maximum au voisinage de cette valeur.



On constate la présence d'une résonance et le filtre est un filtre "passe-bande"

b) Le circuit R, L, C série convient parfaitement à condition de prendre comme tension d'entrée la tension totale aux bornes du circuit et pour tension de sortie la tension aux bornes du condensateur. La fonction de transfert en amplitude complexe vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On pose $LC\omega_0^2 = 1$ et $RC = 1/Q\omega_0$ alors :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + j\omega/Q\omega_0}$$

qui est bien la forme désirée.

c) Cette fonction de transfert est une fonction de transfert "type" le cours nous apprend qu'il y a un maximum pour le module quand $Q > 1/\sqrt{2}$. A l'égalité $Q = 1/\sqrt{2}$ on a un filtre de Butterworth d'ordre 2 et il n'y a plus résonance.

Avec la formule de ε_r donnée on constate que ε'_r vaut 1 pour $\omega = \omega_0$ et varie fortement autour de cette valeur. ε''_r passe par une résonance au voisinage de ω_0 mais comme $\gamma \ll \omega_0$ cette résonance est très pointue et la pulsation de résonance très proche de ω_0

I.B.9) Le logiciel de calcul formel le plus répandu en classes préparatoires est Maple. On va donc écrire les commandes dans ce langage. Pour simplifier on n'envisagera que ε'_r , pour ε''_r les commandes sont les mêmes.

```
>beta:=gamma/omega[0];
x:=omega/omega[0]; restart;
>epsilon[r1]:=1+((1-x^2)/(1-x^2)^2+(beta*x)^2)*(omega[p]/omega[0])^2;
f:=(epsilon[r1]-1)/(omega[p]/omega[0])^2;
>assume(beta,numeric);
  assume(beta>0);
  assume(beta<1);
>plot(subs(beta=0.1,f),x=0..5,thickness=2,numpoints=200,color=black);

df:=diff(f,x); simplify(df);
>solutions:=[solve(df,x)];
>S1:=solution[4];

>series(S1,beta=0,3);
```

L'auteur tient à remercier notre collègue Pascal POTIER pour l'aide extrêmement efficace qu'il lui apporté dans la rédaction de la solution de cette question.

I.C-Une solution des équations de Maxwell

I.C.1) Choisir E_0 réel revient à choisir l'origine des phases en $t = 0$ et $z = 0$ ce qui est tout à fait possible. Ainsi le rédacteur du corrigé n'aura pas à utiliser trop souvent la commande

`\underline}`

I.C.2) Les deux équations de Maxwell utilisées dans la propagation sont en notation réelle :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad \overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t)$$

Dans un diélectrique $\vec{j} = 0$. En amplitude complexe la dérivée par rapport au temps se transforme en une multiplication par $j\omega$, la dérivée par rapport à z se transforme en une multiplication par $-jk$. Comme il n'y a qu'une variable d'espace les rotationnels n'auront qu'une composante :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -jk \vec{E} \vec{u}_y \quad \overrightarrow{rot} \vec{B} = jk \vec{B} \vec{u}_x$$

Par ailleurs dans un diélectrique en amplitude complexe $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$.

En n'écrivant pas les termes en $e^{j(\omega t - kz)}$ qui se simplifient de toute façon, les deux équations de Maxwell donnent, la première en projection sur \vec{u}_x et l'autre sur \vec{u}_y :

$$-jk.E_0 = -j\omega.B_0 \quad jk.B_0 = j\omega.\varepsilon_0\varepsilon_r.E_0$$

En faisant le rapport des deux relations dans le bon sens on simplifie par le champ électrique et le champ magnétique et il reste :

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Il reste $k^2 = k_0^2 \varepsilon_r(\omega)$ qui est une relation de dispersion.

I.C.3) Avec les notations de l'énoncé le champ électrique peut s'écrire : $\vec{E} = E_0.e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$. On voit que l'amplitude du champ électrique décroît exponentiellement avec z , il y a donc absorption de l'onde. Le terme $\delta = 1/k''$ représente la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu : c'est la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde n'est plus que la fraction $1/e$ de l'amplitude initiale. k' dépendant de ω le milieu est toujours dispersif, son indice de réfraction réel dépend de la longueur d'onde.

I.C.4) De la première équation de Maxwell en amplitude complexe on tire $B_0 = E_0.k/\omega$. Les champs demandés ont alors pour expression :

$$\vec{E} = E_0.e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_x \quad \vec{B} = \frac{k' - jk''}{\omega} E_0.e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_y$$

I.D-Considérations énergétiques.

I.D.1) En régime sinusoïdal représenté par les amplitudes complexes la valeur moyenne du vecteur de POYNTING est $\langle \vec{\Pi} \rangle = \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)/2\mu_0$ où l'astérisque désigne la quantité conjuguée de la grandeur considérée. Le produit d'une exponentielle à exposant imaginaire pur par sa quantité conjuguée est égal à l'unité, on pourra donc ne pas l'écrire, il reste :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{u}_z E_0^2 . e^{-2k''z} \Re(k' + jk'')/2.\mu_0\omega = \vec{u}_z E_0^2 . e^{-2k''z} k'/2.\mu_0\omega$$

I.D.2) a) La puissance volumique instantanée cédée au milieu extérieur par une densité de courant \vec{j} soumise à l'action d'un champ électrique \vec{E} est

$\vec{j} \cdot \vec{E}$. En amplitude complexe pour avoir la valeur moyenne dans le temps on prend la partie réelle du produit d'une des quantités par le complexe conjugué de l'autre et on divise par 2 soit $P_{milieu} = \Re[\vec{j}_{pol} \cdot \vec{E}^* / 2]$. Par ailleurs, en amplitude complexe $\vec{j}_{pol} = j\omega \cdot \vec{P}$ et $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \cdot \vec{E}$. on obtient alors :

$$P_{milieu} = \Re\left[\frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0\Re[\varepsilon'_r - 1 - j\varepsilon''_r]\right]e^{-2k''z}E_0^2$$

Le terme imaginaire de cette expression correspond à une puissance réactive qui n'échange pas d'énergie avec le milieu extérieur, on ne conserve donc que le terme réel :

$$P_{milieu} = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon''_r \cdot e^{-2k''z}E_0^2$$

On peut remarquer que "puissance" et "polarisation" commençant par le même lettre il fallait faire attention de ne pas confondre les lettres P les désignant.

b) La force de friction est $-m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$ son travail élémentaire pour un déplacement $d\vec{r}$ est $dW = -m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{r}$ soit une puissance instantanée $dW/dt = -m\gamma(\frac{d\vec{r}}{dt})^2$. On a vu plus haut que $\vec{r} = -\vec{p}/e = -\vec{P}/ne$.

On passe en amplitude complexe : $d\vec{r}/dt$ se transforme en $j\omega\vec{r} = -j\omega\vec{P}/ne$

$$\vec{P} = \varepsilon_0[(\varepsilon'_r - 1) - j\varepsilon''_r]\vec{E}$$

La valeur moyenne dans le temps du terme entre crochets au carré est égal au produit de ce terme par son complexe conjugué divisé par 2.

$$P_{electron} = -\frac{m\gamma\varepsilon_0^2\omega^2}{2n^2e^2}[(\varepsilon'_r - 1)^2 + \varepsilon''_r{}^2]E_0^2 \cdot e^{-2k''z}$$

c) La puissance volumique moyenne reçue par le milieu est l'opposée de celle reçue par un électron multipliée par le nombre d'électron par unité de volume n soit

$$P_{vol} = \frac{m\gamma\varepsilon_0^2\omega^2}{2ne^2}[(\varepsilon'_r - 1)^2 + \varepsilon''_r{}^2]E_0^2 \cdot e^{-2k''z}$$

Il nous faut simplifier cette expression pour lui donner une forme plus convenable. Plongeons donc les mains dans le cambouis en utilisant les valeurs de ε'_r et ε''_r de l'énoncé :

$$[(\varepsilon'_r - 1)^2 + \varepsilon''_r{}^2] = \frac{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega\omega_p)^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2} = \omega_p^4 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2}$$

Simplifions et multiplions par $\frac{m\gamma\varepsilon_0}{n \cdot e^2} = \frac{1}{\omega_p^2}$, il vient :

$$P_{vol} = \frac{\varepsilon_0\omega}{2} \cdot \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2k''z} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega\varepsilon''_r E_0^2 e^{-2k''z}$$

I.D.3) a) Nous prenons une tranche de milieu d'épaisseur dz perpendiculaire à l'axe Oz . Désignons par Σ la surface de cette tranche. Le volume de la tranche est $\Sigma.dz$. L'énergie moyenne laissée par l'onde est le flux entrant du vecteur de POYNTING moyen soit : $[\langle \Pi_z \rangle (z) - \langle \Pi_z \rangle (z + dz)].\Sigma = -\Sigma dz.d \langle \Pi_z \rangle (z)/dz$. L'énergie moyenne reçue par le milieu est $P_{vol}.\Sigma.dz$. Soit :

$$P_{vol} = -d \langle \Pi_z \rangle (z)/dz = 2k'' E_0^2 . e^{-2k''z} k' / 2 . \mu_0 \omega$$

Ici nous devons calculer $2k'.k''$. pour cela reprenons la valeur de k^2 :

$$k^2 = [k' - j.k'']^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'_r - j.\varepsilon''_r) \quad \rightarrow \quad 2k'.k'' = \varepsilon''_r$$

Or $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$. Il reste enfin :

$$P_{vol} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega \varepsilon''_r . e^{-2k''z}$$

On retrouve bien les mêmes expressions que précédemment, mais cela a été laborieux.

b) Le bilan de puissance est un cas particulier du principe de conservation de l'énergie qui constitue le premier principe de la Thermodynamique.

I.E-Interprétation de quelques couleurs «par transparence».

I.E.1) Si ε''_r est négligeable il n'y a pas absorption de lumière et le milieu est transparent. L'onde se propage sans atténuation.

b) Si les valeurs de ω_0 n'appartiennent pas au domaine du visible le diélectrique apparaît comme transparent.

c) On néglige ε''_r , il reste

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r = 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Au dénominateur le terme en $\gamma^2\omega^2$ est très négligeable devant l'autre et il reste après simplification :

$$\varepsilon'_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Si ε_r est réel k l'est aussi et $k^2 = k_0^2 . \varepsilon_r = k_0^2 . n'^2$ d'où l'on déduit :

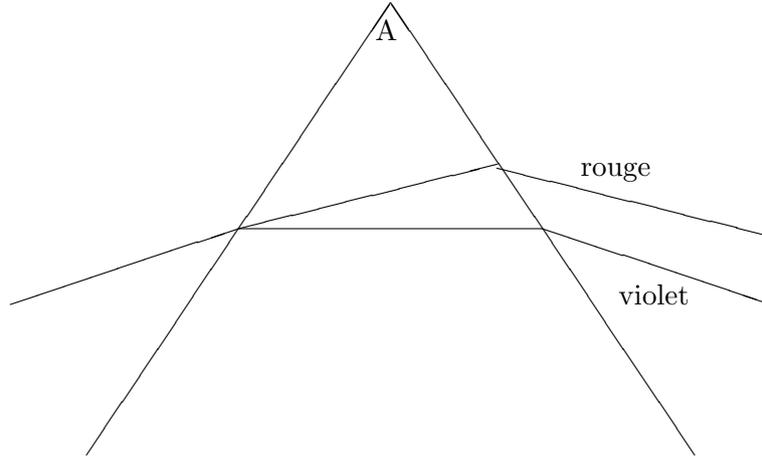
$$n' = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

d) Si $\omega_0 > \omega$ l'indice n' est supérieur à 1, de plus pour ω grand (violet) le dénominateur du terme sous le radical est petit et n' est grand. D'où

$n'_{violet} > n'_{rouge}$. Par ailleurs en optique géométrique les formules classiques du prisme sont :

$$\sin i = n \cdot \sin r \quad \sin i' = n \cdot \sin r' \quad r + r' = A \quad D = i + i' - A$$

Fixons la valeur de i on en déduit $r_{violet} < r_{rouge}$, d'où $r'_{violet} > r'_{rouge}$ et $i'_{violet} > i'_{rouge}$. La déviation du rayon violet est plus forte que celle du rayon rouge.



I.E.2 a) On a vu que $k^2 = k_0^2 \cdot \underline{\varepsilon}_r = k_0^2 \cdot (n' - jn'')^2$. d'où $\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r = (n' - jn'')^2$ soit deux équations :

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon'_r \quad 2n'n'' = \varepsilon''_r$$

Si on prend $\omega = \omega_0$ on voit sur la courbe de la page 2 que $\varepsilon''_r \approx \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0}$ en négligeant 1 devant le rapport indiqué. De même on tire $n' = \varepsilon''_r / 2n''$ que l'on reporte dans la première équation où l'on a fait $\varepsilon'_r = 1$ comme indiqué sur la courbe de la page 2.

$$\frac{\varepsilon''_r^2}{4n''^2} - 4n''^2 = 1 \quad 4n''^4 + 4n''^2 - \varepsilon''_r^2 = 0$$

C'est une équation bicarrée en n''^4 compte tenu que $\varepsilon''_r \gg 1$ on peut négliger le terme du second degré et écrire $2n''^2 = \varepsilon''_r$ soit :

$$n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}$$

De même $n'^2 = 1 + n''^2$ comme $n''^2 \gg 1$ on trouve $n'^2 \approx n''^2$ et $n' \approx n''$.

$$n' \approx \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}$$

b) Le milieu est absorbant pour cette onde. L'onde s'atténue en se propageant dans le milieu. Si le milieu est assez épais il paraît noir pour la pulsation ω_0 .

c) Le rubis absorbe la couleur bleue. Par transparence il a la couleur complémentaire : les trois couleurs primaires sont le rouge, le vert et le bleu (R,V,B). Le rubis a donc la couleur mélange de rouge et de vert soit un rouge foncé.

d) Pour l'aigue-marine $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ soit une fréquence de $f_0 = 0,72 \cdot 10^{14} \text{ Hertz}$. Cette fréquence est inférieure à celle de la radiation rouge, donc dans l'infrarouge. Le milieu absorbe l'infrarouge proche et a une couleur légèrement bleutée.

I.E.3) a) L'eau ne possède pas de valeurs de ω_0 dans la visible sans quoi elle ne serait pas transparente, du moins sous faible épaisseur.

b) En revanche l'eau présente des pulsations d'absorption dans l'infrarouge et même en dessous (application aux fours à microondes). Le soleil envoie des rayonnements infrarouges (attention aux coups de soleil) et l'eau de la piscine absorbe ces rayonnements et chauffe.

I.E.4) Une application à la mesure en chimie.

La norme du vecteur de POYNTING moyen est en $e^{-2k''d}$. Si la solution n'est pas très concentrée on peut linéariser la fonction et admettre que l'absorption est proportionnelle à d

Il s'agit de la loi de Beer-Lambert découverte expérimentalement par Wilhelm Beer, astronome allemand (1797-1850) et Jean-Henri Lambert mathématicien, physicien et philosophe français (1728-1777). Depuis la modélisation en a été faite et cette loi est utilisée en spectrophotométrie pour mesurer des concentrations et d'autres caractéristiques des solutions.

Partie II- Couleurs par diffusion

II.A-

II.A.1) Les expressions données sont celles du champ électromagnétique à grande distance. Elles supposent que les dimensions du dipôle sont très petites devant la longueur d'onde, que la distance r est très grande devant la longueur d'onde et qu'on ne conserve dans les expressions que les termes de plus haut degré en r/λ

II.A.2) Pour calculer le vecteur de POYNTING il nous faut calculer les champs électrique et magnétique du dipôle.

$$\frac{d^2 \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{dt^2} = -\omega^2 \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{u}_x$$

Exprimons tout de suite les produits vectoriels des vecteurs que nous aurons à utiliser :

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_r = \sin \theta \vec{u}_\varphi \quad \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$$

Pour ne pas encombrer les calculs nous poserons $\underline{p}(t - r/c) = p()$ Le champ $\vec{E}(M, t)$ a pour expression :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{-\omega^2 \cdot p()}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [\vec{u}_x \wedge r\vec{u}_r] \wedge r\vec{u}_r$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{-\omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\theta$$

On fait de même pour le champ magnétique :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{-\mu_0 \omega^2 p()}{4\pi c r^2} [\vec{u}_x \wedge r\vec{u}_r]$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{-\omega^2 \mu_0 \sin \theta}{4\pi c r} \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{u}_\varphi$$

On retrouve bien le fait qu'à grande distance le champ électromagnétique a la structure d'une onde plane perpendiculaire au rayon vecteur et telle que :

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{c}{\epsilon_0 c^2 \mu_0} = c$$

Le vecteur de POYNTING s'écrit donc :

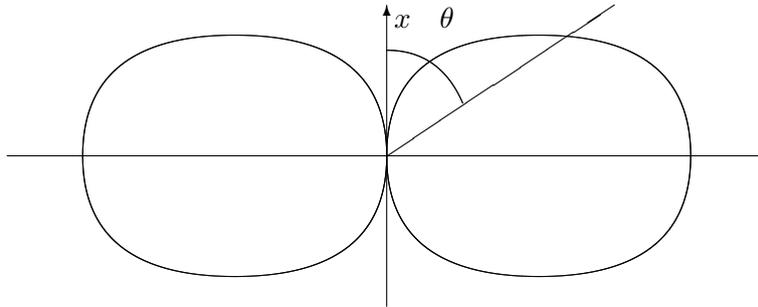
$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\omega^4 \sin^2 \theta \mu_0^2 c}{(4\pi)^2 r^2} [\underline{p}(t - \frac{r}{c})]^2 \vec{u}_r$$

La valeur moyenne dans le temps du carré d'une fonction sinusoïdale du temps est égale à la moitié du carré de son amplitude soit :

$$\langle \vec{\Pi}(r, \theta) \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0^2 c \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2} \cdot [\frac{e^2}{m\omega_0^2}]^2 \cdot E_0^2 \cdot \vec{u}_r$$

Pour simplifier posons le terme facteur de $\sin^2 \theta$ égal à Π_0 , ainsi $\langle \Pi(\theta) \rangle = \Pi_0 \sin^2 \theta$

II.A.3) C'est une courbe en coordonnées polaires planes qui représente le diagramme de rayonnement énergétique du dipôle. Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ $\langle \Pi(\theta) \rangle = 0$; pour $\theta = \pi/2$ ou $-\pi/2$ $\langle \Pi(\theta) \rangle = \Pi_0$.



II.A.4) On reprend $\Pi(\theta) = \Pi_0 \cdot \sin^2 \theta$. On fait varier θ de $d\theta$. La couronne élémentaire sphérique a pour surface $d\Sigma = 2\pi r \sin \theta r \cdot d\theta$. Le flux élémentaire à travers cette surface vaut $d\varphi = 2\pi r^2 \Pi_0 \sin^3 \theta d\theta$. La moyenne temporelle de la puissance totale rayonnée est donc :

$$\int_0^\pi 2\pi r^2 \Pi_0 \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \cdot 2\pi r^2 \Pi_0$$

En rétablissant le valeur de Π_0 il vient :

$$P_{moy} = \frac{\omega^4 \mu_0^2 c}{12\pi} \cdot \left(\frac{e^2}{m\omega_0^2}\right)^2 \cdot E_0^2$$

II.B-

II.B.1) Quand le soleil est haut dans le ciel le champ électrique de son onde est pratiquement parallèle à la surface de la terre. Donc l'angle θ est voisin de $\pi/2$ correspondant au rayonnement maximal. On a vu que la puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4 ce qui favorise les fréquences élevées et la couleur bleue. Un ciel sans nuage est donc bleu.

II.B.2) Quand le soleil se couche les rayons du soleil traversent un dioptre sphérique sous incidence quasi rasante. Il y a donc une déviation géométrique des rayons lumineux vers la surface de la terre. On a vu que pour les milieux transparents l'indice de réfraction était plus grand pour le bleu que pour le rouge. Les rayons bleus sont plus déviés vers la terre que les rayons rouges et n'atteignent pas l'observateur. Seuls les rayons rouges arrivent vers la personne qui voit le soleil. On peut remarquer que comme ils traversent un dioptre sphérique l'image du soleil est agrandie.

II.B.3) La fumée s'élevant d'une cigarette est assez concentrée en particules et on peut proposer comme explication de la couleur bleue la même que pour le soleil.

En passant dans les poumons, la fumée y laisse une partie de ses particules et celles qui restent ont sans doute un ω_0 plus grand de sorte que les dipôles élémentaires ont un moment dipolaire plus faible et que leur rayonnement participe peu à l'émission de lumière qui est simplement réfléchi par les particules.

Partie III-Couleurs interférentielles

III.A- En lumière monochromatique

III.A.1) Le rayon (1) est simplement réfléchi sur l'huile d'indice n la formule de l'énoncé donne :

$$|\underline{E}_1/\underline{E}_0| = \frac{1-n}{1+n}$$

III.A.2) Désignons par \underline{E}'_0 le champ transmis du rayon (0) dans l'huile et par \underline{E}'_1 le champ réfléchi à l'interface eau-huile. On a donc :

$$\begin{aligned} |\underline{E}'_0/\underline{E}_0| &= \frac{2}{1+n} & |\underline{E}'_1/\underline{E}'_0| &= \frac{n-n'}{n+n'} \\ |\underline{E}_2/\underline{E}'_1| &= \frac{2n}{1+n} & |\underline{E}_2/\underline{E}_0| &= \frac{4n}{(1+n)^2} \cdot \frac{n-n'}{n+n'} \end{aligned}$$

La situation des rayons (3) et (2) est la même que pour les rayons (2) et (1) ce qui donne :

$$|\underline{E}_3/\underline{E}_2| = |\underline{E}_2/\underline{E}_1| = \frac{4n(n-n')}{(1+n)(n-n')}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve :

$$|\underline{E}_1/\underline{E}_0| = -0,2 \quad |\underline{E}_2/\underline{E}_0| = 0,06 \quad |\underline{E}_3/\underline{E}_0| \sim 3,6 \cdot 10^{-3}$$

Le signe $-$ de la première expression signifie que la réflexion se fait avec un déphasage de π soit une différence de marche de $\lambda/2$. On voit par ailleurs que le champ $|\underline{E}_3|$ est assez largement négligeable devant les autres.

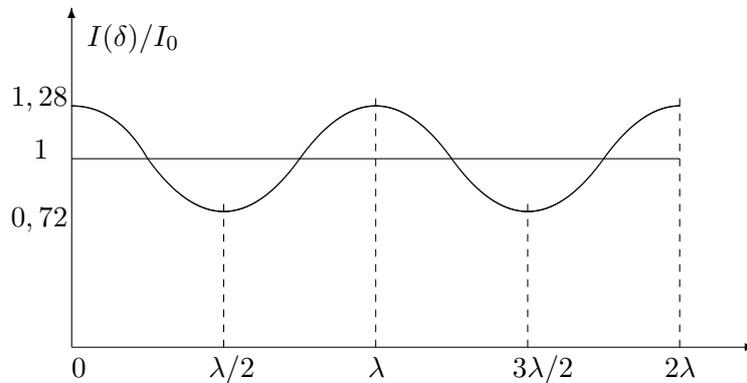
III.A.3) a) Les rayons réfléchis (1) et (2) ont un déphasage $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$. Pour simplifier les calculs posons $|\underline{E}_2/\underline{E}_1| = \alpha$ de telle sorte que $\underline{E}_2 = \alpha \cdot \underline{E}_1 \cdot e^{-j\varphi}$. Le champ total est la somme des deux $\underline{E}_t = \underline{E}_1(1 + \alpha \cdot e^{-j\varphi})$. L'intensité lumineuse est proportionnelle à la norme du carré du champ total

$$|\underline{E}_t|^2 = |\underline{E}_1|^2 \cdot (1 + \alpha \cdot e^{-j\varphi})(1 + \alpha \cdot e^{+j\varphi}) = |\underline{E}_1|^2 \cdot [1 + \alpha^2 + \alpha(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})] = |\underline{E}_1|^2 \cdot [1 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \cos \varphi]$$

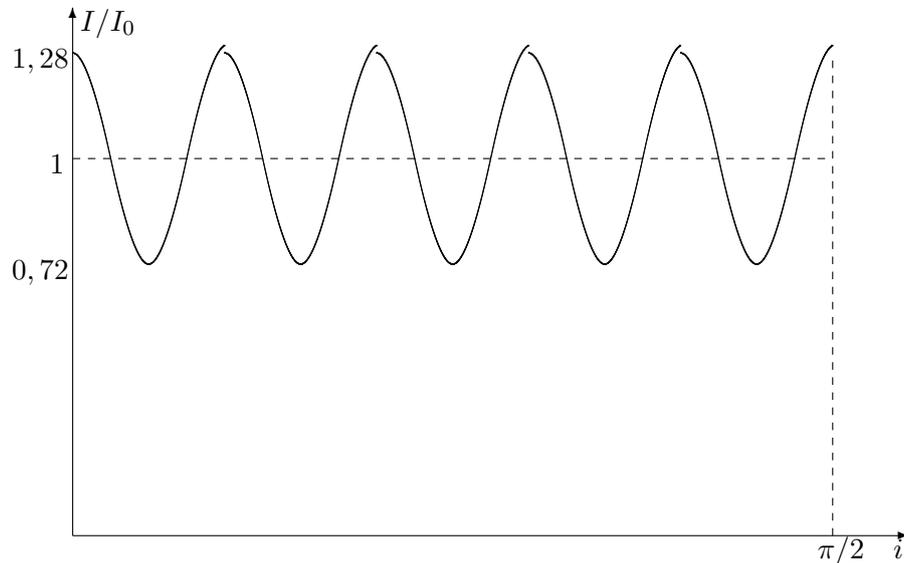
On met $1 + \alpha^2$ en facteur et à un coefficient multiplicatif près on peut écrire :

$$I = I_0 \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cos \varphi\right) = I_0 \cdot \left[1 + C \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right]$$

D'où la valeur de $C = 2\alpha/(1 + \alpha^2)$. Numériquement on trouve $C = 0,28$. La visibilité des franges est définie par $(I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min}) = C$. I_{max} est obtenue pour $\varphi = 0$ et I_{min} pour $\varphi = \pi$. La courbe $I(\delta)/I_0 = 1 + 0,28 \cos(2\pi\delta/\lambda)$ l'intervalle $(0, 2\pi)$ suffit pour représenter la courbe.



d) En fait la fonction $g(i) = 2\pi\delta/\lambda$ et donc $I/I_0 = 1 + 0,28.g(i)$. De 40π à 30π il y a cinq fois 2π donc cinq sinusoides.



III.B- Irisations

III.B.1) A la question suivante l'énoncé parle de teintes à la surface de la couche d'huile. Il ne s'agit donc pas d'interférences à l'infini comme dans le cas précédent mais d'interférences des lames minces à faces non parallèles comme le coin d'air.

En un point de la surface la différence de marche optique entre le rayon réfléchi sur l'interface huile-air et le rayon réfléchi sur l'interface eau-huile est voisin de $2.n.e \cos r + \lambda/2$. Quand l'œil observe un point de la surface le pinceau lumineux est de faible étendue et on peut voir des interférences en mettant au point sur la surface. Si l'épaisseur est suffisamment faible les interférences constructives ont lieu pour diverses longueurs d'onde et donc des couleurs différentes, d'où la présence d'irisations.

III.B.2) On observe ces irisations après la pluie quand le soleil apparaît sur une route à fort trafic où les véhicules laissent des traces d'huile de faible épaisseur qui surnagent sur l'eau. La lumière blanche du soleil donne des interférences de diverses couleurs en fonction de l'épaisseur ponctuelle de la couche d'huile.

III.B.3) On admet qu'au delà de l'ordre 10 (différence de marche supérieure à 10λ) les interférences ne sont plus visibles, les couleurs se mélangent pour donner un blanc d'ordre supérieur.

En prenant pour ordre de grandeur de la différence de marche $2.n.e$ on écrit $2.n.e > 10\lambda$ on peut prendre $\lambda = 0,6 \mu m$ et $e \approx 2 \mu m$.

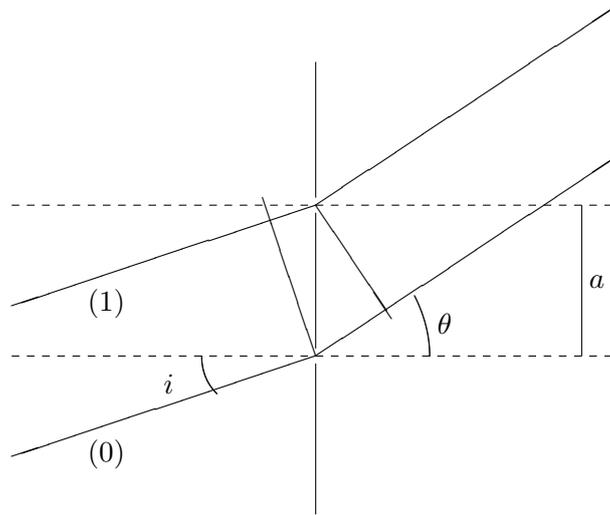
Partie IV - Couleurs par diffraction

IV.A-

Une fente a une largeur bien plus grande que son épaisseur. Éclairée en lumière parallèle une ouverture rectangulaire a une figure de diffraction dans deux directions en $\sin^2 X/X^2$ où X est un terme du type $2\pi.b.\alpha'/2\lambda$ où b est une des largeurs de l'ouverture et α' la direction d'émergence. Si $b \gg \lambda$ la seule solution possible est $\alpha' = 0$. Les rayons émergents sont dans le plan yOz .

IV.B-

IV.B.1) Faisons la figure permettant de calculer la différence de marche pour les rayons (0) et (1) :



Le rayon (0) est en retard de $a.\sin i$ sur le rayon (1) et en avance de $a.\sin \theta$ sur ce même rayon. Le retard de marche du rayon (1) sur le rayon (0) est donc de : $a(\sin \theta - \sin i)$ il a donc un déphasage négatif :

$$\varphi = -2.\pi.a(\sin \theta - \sin i)/\lambda$$

IV.B.2) Compte-tenu du déphasage φ négatif les amplitudes successives des ondes s'écrivent :

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_0.e^{j\varphi} \quad \underline{a}_2 = \underline{a}_0.e^{2j\varphi} \dots \underline{a}_n = \underline{a}_0.e^{j(N-1)\varphi}$$

La somme des amplitudes complexes de ces termes est la somme d'une suite géométrique :

$$\underline{a}_0[1 + e^{j\varphi} + \dots + e^{j(N-1)\varphi}] = \underline{a}_0 \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = \underline{a}_0.\mathcal{A}(N, \varphi)$$

L'intensité lumineuse diffractée est proportionnelle à la norme du carré de l'amplitude complexe totale, soit à $|a_0|^2 \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^*$. Le produit $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^*$ donne, tous calculs faits :

$$\frac{1 - \cos N\varphi}{1 - \cos \varphi} = I(N, \varphi)$$

Si on veut que la fente diffracte la même amplitude dans toutes les directions il faut que son épaisseur e soit très petite devant la longueur d'onde.

IV.B.3) D'après la courbe l'intensité diffractée est maximale pour les valeurs de $\varphi = \pm 2k\pi$ soit

$$-\frac{2\pi a(\sin \theta - \sin i)}{\lambda} = \pm 2k\pi$$

soit

$$a(\sin \theta - \sin i) = \pm k\lambda$$

Le fait que N soit grand montre simplement que les courbes donnant les maxima sont étroites et ne se recouvrent pas.

IV.C-

IV.C.1) Comme les rayons se réfléchissent dans le même milieu, les différences de marche diffractées s'ajoutent au lieu de se retrancher de la sorte :

$$\varphi' = \frac{2\pi a(\sin i + \sin \theta')}{\lambda}$$

IV.C.2) Un disque compact étant assez grand il faut en découper une petite partie rectangulaire avec les sillons perpendiculaires au grand côté et la placer sur la platine d'un goniomètre. On éclaire en incidence normale avec un collimateur qui envoie des rayons parallèles et on observe avec la lunette réglée à l'infini.

IV.C.3) La distance entre deux sillons voisins étant de $a = 1,6$ *mm*, le nombre de traits par millimètre est $1000/1,6 = 625$, ce qui est supérieur au réseau de Rowland référence à 570 traits par millimètre qui a été fabriqué pour éviter le mélange des ordres de diffraction en lumière blanche. Il n'y a donc pas mélange des ordres.

IV.C.4) La face du disque compact opposée aux sillons est aluminisée pour renvoyer la lumière de la diode laser vers la photodiode de lecture et éviter que le rayon laser ne puisse atteindre l'œil de l'auditeur. On peut donc se voir dans un disque compact : si le plastique est coloré, l'image est colorée. De plus on observe des spectres colorés assez étendus qui se superposent à l'image.

IV.D-

IV.D.1) Le plan $z = 0$ diffracte une amplitude totale $a_1 \mathcal{A}(N_y, \varphi_y)$. Tous les plans parallèles à xOy diffractent la même amplitude avec un déphasage

φ_z et une fonction $\underline{A}(N_z, \varphi_z)$. On obtient l'amplitude totale en faisant le produit de deux termes, ce qui pour l'intensité donne le produit des termes correspondants : $|a_1|^2 \cdot I(N_y, \varphi_y) \cdot I(N_z, \varphi_z)$.

IV.D.2) Si on se place dans le cas de la réflexion spéculaire $r' = -r$ la différence de marche pour deux bâtonnets voisins du plan xOy est nulle : $\varphi_y = 0$. La différence de marche entre deux bâtonnets voisins i, j et $i, j + 1$ vaut $2.n.a \cos r$ puisqu'on est dans un milieu d'indice n . Avec $\sin i = n \cdot \sin r$ il vient :

$$\varphi_z = \frac{4\pi.a.n}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

IV.D.3) Il faut prendre $\varphi_z = 2.k.\pi$ pour mettre en phase tous les rayons diffractés.

$$\frac{4\pi.a.n}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = 2.k.\pi$$

$$1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} = k^2 \left[\frac{\lambda}{2.n.a} \right]^2$$

IV.D.4) On écrit

$$\frac{\sin^2 i}{n^2} = 1 - k^2 \left[\frac{\lambda}{2.n.a} \right]^2$$

Le second membre doit être manifestement positif et on obtient la valeur minimale de a pour $k = 1$ soit :

$$\frac{\lambda}{2.n.a} < 1 \quad \dots a > \frac{\lambda}{2.n}$$

Il faut prendre pour λ la valeur la plus faible du spectre visible soit $0,4 \mu m$ et il vient :

$$a = 0,133 \mu m$$

IV.D.5) φ_y est toujours nul et $\varphi_z = 4\pi.a.n/\lambda$. Avec une distance $a = 0,16 \mu m$ on est juste au dessus de la valeur minimale de a pour la lumière violette. Le bleu ayant une longueur d'onde un peu supérieure à celle du violet on observe des interférences bleues. Quand $a = 0,17 \mu m$ on est un peu au dessus du bleu soit le turquoise qui contient un peu de vert. Pour $a = 0,21 \mu m$ on se rapproche du rouge.