

Centrale-Supélec, Physique MP

Freinage électromagnétique d'une plaque métallique

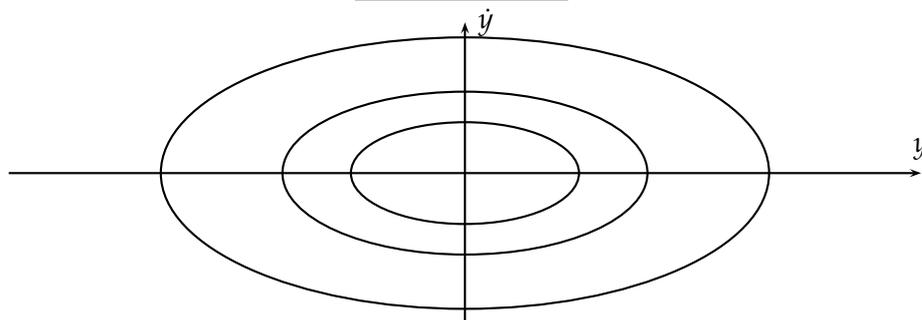
Concours 2007

I. Analyse d'une expérience

I-A. Étude des petites oscillations libres

I-A.1)

- a. De façon évidente, $\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (mouvement circulaire de centre respectif O_1 ou O_2). Les deux points de la plaque ont même vitesse (ainsi d'ailleurs que tout autre point de la plaque); celle-ci est donc en translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.
- b. Le théorème de König permet alors d'affirmer $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_G^2$ où la vitesse de la plaque est la même que celle de tout autre point de la plaque, $\vec{v}_G = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$.
- c. Les actions de contact sont conservatives car un fil inextensible dont le point d'attache est fixe ne fournit aucun travail ($\delta W = \vec{F}_{\rightarrow A_1} \cdot \vec{v}_{A_1} dt = 0$); les forces intérieures à un solide ne travaillent pas non plus et on peut donc écrire la conservation de l'énergie mécanique, $E_c + E_p = E = \text{constante}$ avec $E_p = -mgx_G = -mg(L \cos \theta + d/2)$. On a donc $\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta = -mgL \cos \theta_0$ soit enfin $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(\cos \theta - \cos \theta_0)$. La dérivation de cette équation par rapport au temps fournit l'équation du second ordre $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$ qui, pour des petits mouvements, prend la forme proposée par l'énoncé avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Enfin $y(t) = L\dot{\theta} \cos \theta \simeq L\dot{\theta}$, vérifie la même équation, $\ddot{y} + \omega_0^2 y(t) = 0$.
- d. Les courbes proposées montrent des oscillations synchrones: leur période ne dépend pas de leur amplitude. C'est une caractéristique de l'équation différentielle établie ci-dessus. On constate aussi l'absence d'amortissement, du fait de l'absence de terme d'ordre 1 dans l'équation du mouvement.
- e. La valeur maximale de \dot{y} est $\omega_0 y_{\max}$ avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, la période T étant évidemment de 1 s pour les trois courbes. On a donc dans l'ordre décroissant des amplitudes $\dot{y}_{\max} = 25,1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ($y_{\max} = 4,0 \text{ cm}$), $\dot{y}_{\max} = 15,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ($y_{\max} = 2,4 \text{ cm}$) et $\dot{y}_{\max} = 9,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ($y_{\max} = 1,5 \text{ cm}$). Au changement près de l'origine des temps, ces trois courbes peuvent être décrites sous la forme $y = y_{\max} \cos(\omega_0 t)$, $\dot{y} = \omega_0 y_{\max} \sin(\omega_0 t)$ avec donc (indépendamment de cette origine) une équation d'ellipse de centre O , $\omega_0^2 y^2 + \dot{y}^2 = \omega_0^2 y_{\max}^2$; les trois courbes, homothétiques l'une de l'autre, sont tracées ci-dessous.



Ces courbes sont bien sûr parcourues dans le sens inverse du sens trigonométrique (y croît dans la partie supérieure du plan lorsque $\dot{y} > 0$).

I-A.2)

a. On a vu que $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ donc $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 24,8 \text{ cm}$.

b. $x_G = a + L \cos \theta$ donc $\Delta x_G = L(1 - \cos \theta_{\max}) = 8,5 \text{ mm}$ (différence des valeurs extrêmes); de même $y_G = L \sin \theta$ donc $\Delta y_G = 2L \sin \theta_{\max} = 12,8 \text{ cm}$: le mouvement de G est presque horizontal puisque on a $\Delta y_G \gg \Delta x_G$.

I-B. Détermination expérimentale du coefficient d'amortissement des petites oscillations

I-B.1) La projection horizontale du théorème de la résultante dynamique appliqué à la plaque s'écrit ici $m\ddot{y} = F_r - \alpha\dot{y}$ où on obtient l'expression de la force de rappel F_r dans le cas où $\alpha = 0$, $F_r = -m\omega_0^2 y$ d'après les questions précédentes. On obtient l'équation proposée par l'énoncé avec $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$.

I-B.2)

a. $\delta = 0,58 \simeq 0,57 = \delta'$; on rend compte de ceci en remarquant que la solution pseudopériodique de l'équation précédente, $y(t) = y_0 \cos(\omega t) \exp(-\lambda t)$ avec pour pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ définit des valeurs successives des maxima $y_n = y_0 \exp(-n\frac{2\pi\lambda}{\omega})$ donc $\delta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{2\pi\lambda}{\omega}$ ne dépend pas de n . On trouve $\lambda_{\text{exp}} = \frac{\delta}{T} = 0,488 \text{ s}^{-1}$, en prenant pour valeurs numériques du décrement logarithmique δ et de la pseudopériode T la moyenne des deux valeurs successivement mesurées.

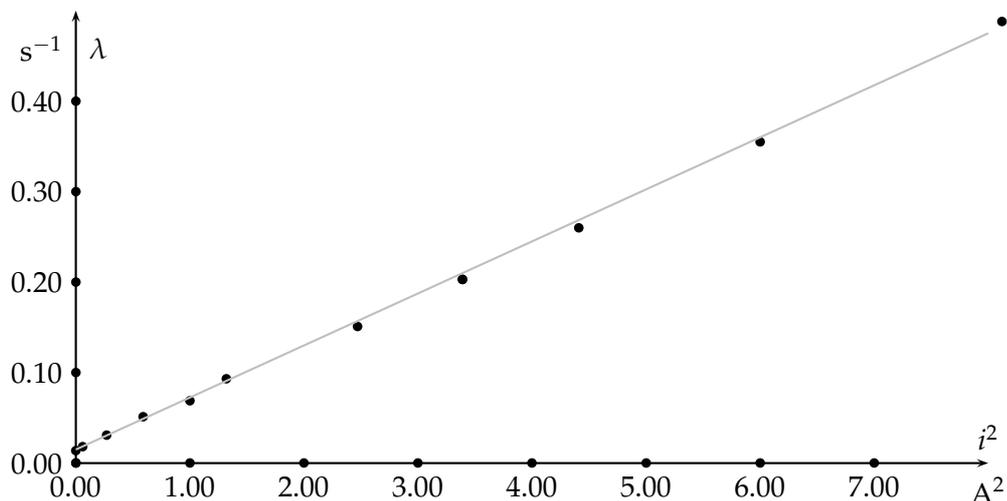
b. $\alpha = 2\lambda m = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ avec $m = \mu d^2 h = 0,245 \text{ kg}$.

I-B.3)

a. Le terme λ_0 correspond à un amortissement fluide par **frottement** (de la plaque dans l'air) car il est indépendant du courant électrique. On peut aussi penser à une contribution d'un champ magnétique extérieur (indépendant du courant électrique): aimants permanents à proximité du dispositif, champ magnétique terrestre, etc.

b. On cherche une dépendance en i^2 car les forces de Laplace sont proportionnelles au **carré du champ** magnétique \vec{B} créé par les bobines: les courants induits dans la plaque sont proportionnels à \vec{B} , et les forces de Laplace elles-mêmes proportionnelles au produit de ces courants par \vec{B} . On peut aussi remarquer que le résultat ne doit pas dépendre du sens de \vec{B} , il s'agit donc logiquement d'une fonction paire de i .

c. On peut faire simplement un tracé de λ en fonction de i^2 , cf. ci-dessous.



Les valeurs numériques utilisées pour ce tracé ont été rappelées dans le tableau qui suit ; on peut constater un bon alignement des valeurs expérimentales sur une droite : le modèle proposé est donc bien **en accord** avec les résultats expérimentaux.

i^2 (A ²)	0,00	0,06	0,27	0,59	1,00	1,32	2,47	3,39	4,41	6,00	8,12
λ (s ⁻¹)	0,0138	0,0182	0,0309	0,0513	0,0689	0,0932	0,151	0,203	0,260	0,355	0,488

- d. Les valeurs correspondent à la droite tracée (obtenue par exemple par une méthode des moindres carrés) ; on trouve $\lambda_0 = 1,51 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 5,61 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \text{A}^{-2}$.

I-B.4) Algorithmique.

- a. On peut proposer la rédaction suivante (en Pascal), sous réserve que $1 < n \leq 1000$:

```
const MaxDim = 1000;
type T_tableau = array[1..MaxDim] of real;

function F(liste:T_tableau; N:integer): integer;
var Ix, R : integer;
begin
  R := 0;
  for Ix := 2 to N-1 do
    if (liste[Ix - 1] < liste[Ix]) then
      if (liste[Ix + 1] < liste[Ix]) then
        inc(R);
  F := R;
end;
```

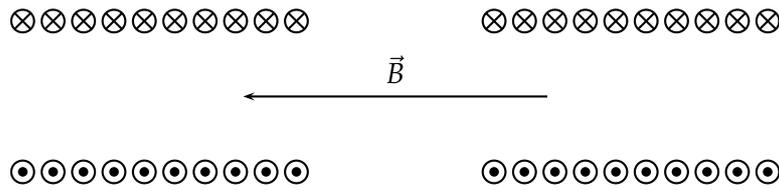
- b. On peut proposer la rédaction suivante (en Pascal), qui fonctionne sous réserve qu'au moins deux maxima consécutifs soient détectés :

```
function G(liste:T_tableau; N:integer): real;
var Ix, R : integer; A, B, delta: real;
begin
  R := 0;
  A := 0;
  delta := 0;
  for Ix := 2 to N-1 do
    if (liste[Ix - 1] < liste[Ix]) then
      if (liste[Ix + 1] < liste[Ix]) then
        begin
          B := liste[Ix];
          if (B > 0) then
            begin
              if (A > 0) then
                begin
                  inc(R);
                  delta := delta + ln(A/B);
                end;
              A := B;
            end;
          end;
        end;
    if R > 0 then G := delta/R else G := 0;
  end;
```

I-C. Structure du champ magnétique créé par les bobines

I-C.1) Le champ magnétique créé par les bobines est donné par la **règle d'Ampère** (tirée de $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$) et est proposé sur la figure page suivante.

I-C.2) Le plan (xOy) est un plan de symétrie des courants donc le champ \vec{B} lui est partout perpendiculaire ; il n'y a donc pas de carte des lignes de champ dans ce plan.



I-C.3) Du fait de la géométrie cylindrique, tout plan passant par l'axe de révolution des bobines est un plan d'antisymétrie des courants ; le champ \vec{B} est donc contenu dans ces plans. De plus, les composantes du champ sont indépendantes de l'angle θ donc, dans le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe des bobines, $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$, où on a déjà vu que $B_r(r, z = 0) = 0$.

I-C.4) Puisque $\vec{B} = B_z(r, z)\vec{u}_z$, $\text{div } \vec{B} = 0$ impose $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ tandis que $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ (dans une région vide de courants) impose $\frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$: le champ est alors uniforme.

I-C.5) La conservation du flux $\pi r^2 B_z$ le long d'un tube de champ impose $B_z(A) = B_z(C) \frac{r_C^2}{r_A^2}$.

I-C.6) La composante $B_z(r, z)$ est, pour des raisons de symétrie par rapport au plan (xOy) , une fonction paire de z ; son développement en fonction de z au voisinage de $z = 0$ ne contient donc que des termes pairs et on peut donc l'écrire sous la forme $B_z(r, z) \simeq B_z(r, z = 0) + \sum_{k \geq 1} \alpha_{2k}(r) z^{2k}$ ou, dans le cas où $r = 0$

et en se limitant au premier ordre non nul, $B_z(r) \simeq B_z(0) \left[1 + \frac{z^2}{\ell^2} \right]$.

I-C.7) La relation $\text{div } \vec{B} = 0$ impose $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$ ou $\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -B_z(0) \frac{2zr}{\ell^2}$, qui s'intègre (par rapport à r) en $r B_r = K - B_z(0) \frac{zr^2}{\ell^2}$, K étant une constante d'intégration. On a donc $B_r = \frac{K}{r} - B_z(0) \frac{zr}{\ell^2}$, qui impose bien sûr $K = 0$ par continuité sur l'axe. La relation $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ impose $\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}$, ce qui permet de dériver la relation précédente par rapport à z selon $\frac{\partial B_r}{\partial r} = -B_z(0) \frac{r}{\ell^2}$ donc enfin, par intégration par rapport à r encore, $B_z = B_z(0) - B_z(0) \frac{r^2}{2\ell^2}$. On a donc bien pour cette composante l'expression proposée par l'énoncé avec $\zeta = \frac{1}{2\ell^2}$. On pouvait obtenir le même résultat en remarquant qu'en régime permanent et en l'absence de courants, $\Delta \vec{B} = 0$ donc $\Delta B_z = 0$ avec $\frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$.

II. Structure du champ électrostatique dans la plaque métallique

II-A. Distribution volumique de charges statiques

II-A.1) Chaque charge mobile est, dans le référentiel du conducteur \mathcal{R}' , soumise au champ $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$, somme du champ électrostatique et du champ électromoteur dû au mouvement de la plaque. La densité volumique de courant dans le référentiel \mathcal{R}' est $\vec{j} = \gamma \vec{E}'$ donc $\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B})$, en admettant que \vec{j} soit indépendant du référentiel.

En réalité, le changement de référentiel pour \vec{j} peut être établi comme suit : dans \mathcal{R}_b , $\vec{j}_b = \sum_k \rho_k \vec{v}_k$, la somme portant sur les différents types de charges, tandis que dans le référentiel de la plaque, $\vec{j} = \sum_k \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v}_0)$. L'hypothèse faite ici consiste donc à négliger $\sum_k \rho_k \vec{v}_0 = \rho \vec{v}_0$ devant $\gamma \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. Comme on verra que ρ_{\max} est de l'ordre de $\frac{\epsilon_0 v_0 B_0}{a}$, cette hypothèse revient à affirmer que $\frac{\epsilon_0 v_0^2 B_0}{a} \ll \gamma v_0 B_0$ ou $v_0 \ll \frac{\gamma a}{\epsilon_0} = \frac{a}{\tau}$ en notant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ le temps caractéristique de réarrangement des charges. Numériquement, le résultat est trivial ($a/\tau \gg c$).

II-A.2) La relation de continuité (conservation de la charge) impose $\text{div } \vec{j} = 0$ (en régime statique).

II-A.3) On en déduit $\text{div } \vec{E} = -\text{div} \left(v_0 B_0 \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{a^2} \right) \right) \vec{u}_x$ donc $\rho = -\epsilon_0 v_0 B_0 \frac{\partial}{\partial x} \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{a^2} \right)$ qui prend bien la forme demandée avec $\Gamma = \frac{\epsilon_0 v_0 B_0}{a}$.

II-A.4) $\rho(X, Y)$ est extrémal si $\frac{\partial \rho}{\partial Y} = 0$ (donc $Y = 0$) et $\frac{\partial \rho}{\partial X} = 0$ (donc $X^2 = 1$). Le maximum correspond à $M_0^+(X = 1, Y = 0)$ et le minimum à $M_0^-(X = -1, Y = 0)$; on a donc $\rho_{\max} = \Gamma \exp \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma}{\sqrt{e}}$.

II-A.5) $\rho(-X, Y) = -\rho(X, Y)$ donc le plan (yOz) est un plan de **symétrie négative** des charges. De même, $\rho(X, -Y) = \rho(X, Y)$ donc le plan (xOz) est un plan de **symétrie positive** des charges. Une courbe d'isodensité $\rho(X, Y) = \text{constante}$ a pour équation $Y = \pm \sqrt{\ln \frac{\Gamma^2 X^2}{\rho^2} - X^2}$, X et ρ ayant même signe; ces courbes entourent (de manière symétrique) les points M_0^+ et M_0^- .

II-A.6) L'excès vaut $Q = h \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=0}^{\infty} \rho(x, y) dx dy = a^2 h \frac{\epsilon_0 v_0 B_0}{a} \int_0^{\infty} X \exp \left(-\frac{X^2}{2} \right) dX \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{Y^2}{2} \right) dY$. La seconde intégrale vaut $2\sqrt{\pi/2}$ et la première vaut $\int_0^{\infty} X \exp \left(-\frac{X^2}{2} \right) dX = \int_0^{\infty} \exp(-u) du = 1$; il reste donc $Q_{X>0} = ah\epsilon_0 v_0 B_0 \sqrt{2\pi}$. Le nombre d'électrons en excédent dans la partie $X < 0$ est $N = -\frac{Q_{X>0}}{e} = 166$

électrons. Le résultat est **très faible**; on peut mettre en doute la validité de la modélisation continue.

II-B. Résolution de l'équation de Poisson dans le référentiel \mathcal{R}_b

II-B.1) $E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z}$ donc le potentiel ne dépend que de **r et θ** .

II-B.2) L'équation $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ peut être écrite en coordonnées réduites en remarquant que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial X}$, donc

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ pour toute fonction f ; on obtient donc $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = -\frac{\Gamma a^2}{\epsilon_0} X \exp \left(-\frac{X^2 + Y^2}{2} \right)$; où on peut

aussi noter que $\frac{\Gamma a^2}{\epsilon_0} = v_0 B_0 a$. De même, en coordonnées polaires réduites, on peut écrire la même équation

sous la forme $\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -v_0 B_0 a R \cos \theta \exp \left(-\frac{R^2}{2} \right)$.

II-B.3) Le laplacien de la fonction proposée vérifie $\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = V_0 \cos \theta \left[\frac{f''}{R} - \frac{f'}{R^2} \right]$, ce qui impose l'équation $V_0 \left[\frac{f''}{R} - \frac{f'}{R^2} \right] = -v_0 B_0 a R \exp \left(-R^2/2 \right)$. Posons alors $V_0 = v_0 B_0 a / \lambda$; il vient alors l'équation différentielle $R \frac{d^2 f}{dR^2} - \frac{df}{dR} = -\lambda R^3 \exp \left(-\frac{R^2}{2} \right)$. La solution générale de cette équation s'écrit (en utilisant les indications de l'énoncé) $f(R) = \alpha + \beta R^2 - \lambda \exp \left(R^2/2 \right)$ et, au vu des conditions aux limites, il faut imposer $\beta = 0$, $\alpha = 1$ et $\lambda = 1$ pour que la solution soit compatible avec le problème physique posé. Finalement, on doit choisir **$V_0 = v_0 B_0 a$** , qui est bien homogène puisque $v_0 B_0$ est homogène à un champ électrique en volt

par mètre, donc V_0 est bien un potentiel en volt. On a vu **$Rf'' - f' = -R^3 \exp \left(-\frac{R^2}{2} \right)$** .

II-B.4) Les extréma, atteints pour $\cos \theta = \pm 1$ (sur la droite (Ox) donc) sont ceux de $\frac{1 - \exp \left(-\frac{R^2}{2} \right)}{R}$; il s'agit des solutions (non nulles) de $R^2 = \exp \left(\frac{R^2}{2} \right) - 1$ donc, numériquement, $R_0 = 1,59$ et les coordonnées des deux points demandés sont **$M_1^+(X = 1,59, Y = 0)$** et **$M_1^-(X = -1,59, Y = 0)$** . Ils sont alignés avec $M_0^- M_0^+$ et situés à l'extérieur du segment formé par ces derniers.

II-B.5) Le maximum ΔV_{\max} de tension sur la plaque est évidemment **$\Delta V_{\max} = V(M_1^+) - V(M_1^-)$** soit aussi

$\Delta V_{\max} = 2V(M_1^+) = 2V_0 \frac{f(R_0)}{R_0}$ ou, après simplification, **$\Delta V_{\max} = \frac{2v_0 B_0 a R_0}{1 + R_0^2} = 1,08 \text{ mV}$** .

II-C. Structure du champ électrique

II-C.1) L'expression $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ (en régime statique) prend ici la forme $\vec{E} = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial V}{\partial R} \vec{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \right)$ en

coordonnées réduites soit
$$\vec{E} = \frac{V_0}{a} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)}{R^2} - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \right] \cos \theta \vec{u}_R + \frac{V_0}{a} \frac{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)}{R^2} \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

II-C.2) Dans le domaine de tracé, $E_\theta > 0$ donc les lignes de champ sont dirigées depuis le maximum de potentiel (le point M_1^+ situé sur l'axe (Ox) en $X = 1,59$) vers le reste du plan. On peut compléter cette figure en remarquant que l'axe (Ox) est axe de symétrie positive des charges (donc du champ qu'elles créent) et l'axe (Oy) axe de symétrie négative.

II-C.3) En O , les symétries imposent $\vec{E}(O) = E_0 \vec{u}_x$ avec $E_0 < 0$; on peut déterminer E_0 par le calcul de la limite $E_0 = \frac{V_0}{a} \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)}{R^2} - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \right]$ soit $E_0 = -\frac{V_0}{2a}$; $\vec{E}(O) = -\frac{v_0 B_0}{2} \vec{u}_x$ avec pour valeur

numérique $E_0 = -20 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On remarquera que $\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 = v_0 B_0 \vec{u}_x$, de norme double et de sens opposé à $\vec{E}(O)$.

II-C.4)

- a. Le fil chargé étant choisi comme axe (Oz) , tout plan passant par cet axe est plan de symétrie matérielle des charges; le champ \vec{E} n'a donc pas de composante orthoradiale (en coordonnées cylindriques). Tout plan orthogonal à (Oz) est également plan de symétrie matérielle des charges; le champ \vec{E} est donc radial, $\vec{E} = E \vec{u}_r$. Enfin, les invariances par rotation et translation montrent que l'unique composante du champ ne dépend que de la distance r à l'axe (Oz) : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$. L'application du théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz) , de rayon r et de hauteur h impose alors $2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$,

d'où
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

- b. Les deux fils créent en O le même champ donc $\vec{E}'(O) = -\frac{Q}{\pi\epsilon_0 h R_0} \vec{u}_X$ soit
$$\vec{E}'(O) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_0 B_0}{1,59} \vec{u}_X.$$

- c. Le facteur numérique $\frac{1}{1,59} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,502$ est assez voisin de $\frac{1}{2}$ pour considérer que les deux champs sont comparables; ils sont de plus de même sens et direction, $\vec{E}'(O) \simeq \vec{E}(O)$.

III. Courant de Foucault et force de Laplace

III-A. Répartition des courant de Foucault

III-A.1) $\vec{j} = \gamma \left(\vec{E} + v_0 \vec{u}_Y \wedge B_0 \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \vec{u}_Z \right)$. Compte tenu que $\vec{u}_Y \wedge \vec{u}_Z = \vec{u}_X = \vec{u}_R \cos \theta - \vec{u}_\theta \sin \theta$ et

$\frac{V_0}{a} = v_0 B_0$, on trouve $\vec{j} = j_R(R, \theta) \vec{u}_R + j_\theta(R, \theta) \vec{u}_\theta$ avec, après calcul,
$$j_R(R, \theta) = \gamma v_0 B_0 \cos \theta \frac{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)}{R^2}$$

et
$$j_\theta(R, \theta) = \gamma v_0 B_0 \sin \theta \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)}{R^2} - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \right].$$

III-A.2) $j_R(R, -\theta) = j_R(R, \theta)$ et $j_\theta(R, -\theta) = -j_\theta(R, \theta)$ donc le plan (xOz) est un plan de symétrie positive des courants; on peut aussi écrire que $j_X(X, -Y) = j_X(X, Y)$ et $j_Y(X, -Y) = -j_Y(X, Y)$.

$j_R(R, \pi - \theta) = -j_R(R, \theta)$ et $j_\theta(R, \pi - \theta) = j_\theta(R, \theta)$ donc le plan (yOz) est un plan de symétrie négative des courants; on peut aussi écrire que $j_X(-X, Y) = j_X(X, Y)$ et $j_Y(-X, Y) = -j_Y(-X, Y)$.

III-A.3) Puisque $1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) \simeq \frac{R^2}{2}$ lorsque $R \rightarrow 0$, on a $j_R(0, \theta) = \frac{\gamma v_0 B_0}{2}$ et $j_\theta(0, \theta) = -\frac{\gamma v_0 B_0}{2}$ donc

$$\vec{j}(O) = \frac{\gamma v_0 B_0}{2} \vec{u}_X = -\gamma \vec{E}(O),$$
 calcul inutile d'ailleurs si on se réfère à II-C.3).

III-A.4) On peut écrire $j_R = \alpha(R) \cos \theta$ où $\alpha(R) > 0$ donc les points N_1 et N_2 sont situés sur l'axe (Oy) avec $\theta = \pi/2$. Le courant s'annule alors si $\exp(R^2/2) = 1 + R^2$, donc $R = R_0 = 1,59$ et les points recherchés vérifient $N_1(X = 0, Y = 1,59)$ et $N_2(X = 0, Y = -1,59)$. Les points N_1, N_2, M_1^+ et M_1^- forment un carré.

III-A.5) On a vu que $j_R(R, \theta)$ a le signe de $\cos \theta$ donc les lignes de courant sont orientées dans le sens trigonométrique autour de N_1 pour $Y > 0$, et dans le sens contraire (sens horaire) autour de N_2 pour $Y < 0$.

III-A.6) On peut choisir, comme surface d'intégration du flux de \vec{j} , le rectangle placé dans le plan (yOz) , tel que $X = 0, 0 \leq Z \leq h$ et $-R_0 \leq Y \leq R_0$; il est donc délimité par deux segments de longueur h placés en N_1 et N_2 .

III-B. Expression théorique du coefficient d'amortissement

III-B.1) L'expression $d\vec{F}_L = Id\vec{r} \wedge \vec{B}$ devient, dans le cas volumique, $\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

III-B.2) En coordonnées cartésiennes, $\vec{f}_L = B(R) [j_Y(X, Y)\vec{u}_X - j_X(X, Y)\vec{u}_Y]$. La résultante de ces forces projetées sur (Ox) est donc $F_x = h \int_{Y=-\infty}^{Y=\infty} \int_{X=-\infty}^{X=\infty} B(R) j_Y(X, Y) dX dY$, où j_Y est une fonction impaire (de X et de Y) et $B(R)$ une fonction paire (de X et de Y). Quel que soit l'ordre d'intégration, on aura donc $F_x = 0$ et la résultante \vec{F}_L est colinéaire à \vec{u}_Y .

III-B.3) On peut écrire $\vec{f}_L \cdot \vec{u}_Y = -B(R)j_X = -B(R) [j_R \cos \theta - j_\theta \sin \theta]$ qui prend encore, après calculs, la forme $f_{Ly} = -\gamma B_0^2 v_0 e^{-\frac{R^2}{2}} \left\{ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}}{R^2} + \sin^2 \theta e^{-\frac{R^2}{2}} \right\}$. L'intégration sur toute la plaque permet de simplifier le résultat puisque $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$; il reste alors, après le changement de variables $R = ra$, $\vec{F}_L = -\alpha_{th} \vec{v}$ avec $\alpha_{th} = \frac{\gamma B_0^2 \pi h a^2}{2}$.

III-B.4) $\alpha_{th} = 8,16 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} < \alpha_{exp} = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ si on suppose que la valeur $B_0 = 40 \text{ mT}$ correspond bien à $i = 2,85 \text{ A}$: l'accord n'est satisfaisant qu'en termes d'ordres de grandeur.

III-C. Effet Joule et résistance équivalente de la plaque conductrice

III-C.1) La puissance (résistante) des forces de Laplace correspondant à une dissipation d'énergie par effet Joule, on peut écrire $\mathcal{P}_J = \alpha_{th} v_0^2$.

III-C.2) Puisque $I = \gamma h B_0 v_0 a$, on peut écrire $\mathcal{P}_J = R_{tot} I^2$ avec $R_{tot} = \frac{\pi}{\gamma h}$.

III-C.3) On a pour cette géométrie des courants $R_{tot} = 8,7 \times 10^{-5} \Omega$.

Bibliographie

Deiber A. et Idda H. « Étude expérimentale et première modélisation du freinage par courants de Foucault », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* février 2007, vol. 101, N° 891 pp. 199-204.

Deiber A. et Idda H., « Freinage par courants de Foucault : des charges réparties en volume guident les courants induits », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* février 2007, vol. 101, N° 891 pp. 177-197.

Deiber A. et Idda H., « Freinage par courants de Foucault : approche rigoureuse de l'existence d'une charge volumique fictive », à paraître.