Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PC

Notations

- Dans ce problème, $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites de complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ représente l'espace vectoriel des suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formées de vecteurs de $\mathbb{C}^k$.
- On note $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à k lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Enfin, si M est une matrice, ${}^tM$ désigne sa transposée.

Question préliminaire

Soit une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

On note $e = det(M)$. On suppose $e \neq 0$.

- Calculer le produit matriciel

$$M \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- En déduire l'expression de la matrice M^{-1} en fonction de a, b, c, d, e.

Partie I - Récurrences linéaires

I.A - Récurrences linéaires d'ordre 2

On considère ici les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe des complexes a_1 et a_0 vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} + a_1\, x_{n+1} + a_0\, x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

I.A.1) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout entier positif n, on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

I.A.2) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0.$$

I.A.3) On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et on note

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AQ = QD$.

b) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, des complexes λ_1, λ_2 et de l'entier n.

I.A.4) On suppose maintenant que A admet une seule valeur propre λ et on note

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

a) Exprimer a_1 et a_0 en fonction de λ.

b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T et déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, du complexe λ et de l'entier n.

I.A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

- soit A admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;
- soit A admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.

- version du 20 février 2008 16h38

I.A.6) **Deux exemples numériques**

Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :

- expliciter la matrice A,
- donner une matrice de passage Q telle que $T = Q^{-1}AQ$ soit d'une forme simple comme ci-dessus,
- en déduire X_n puis x_n en fonction de x_0, x_1 et n

(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).

a) **Exemple 1**

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

b) **Exemple 2**

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

I.B - Vers un ordre supérieur, à petits pas

On note Φ l'application qui à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ associe la suite des vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ définie par $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, les trois premiers termes de la suite $\Phi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ sont $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

À tout polynôme unitaire de $\mathbb{C}_3[X]$,

$$P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on associe le sous-espace $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$.

I.B.1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

I.B.2) Vérifier que $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ est linéaire et injective. Est-elle surjective ?

I.B.3)

a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$. Montrer que son image $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par Φ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

b) Montrer que réciproquement, toute suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ pour laquelle on a $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est élément de $\Phi(\mathcal{R}_P)$.

I.B.4) Montrer que $\Phi(\mathcal{R}_P)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ engendré par les suites de vecteurs $(A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}}$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

En déduire la dimension de $\mathcal{R}_P$.

I.C - Des exemples (quasi) numériques

On introduit ici quelques exemples de polynômes $P(X)$ et on se propose d'étudier le comportement à l'infini des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{R}_P$.

I.C.1) **Exemple 1**

On considère ici le polynôme : $\quad P(X) = X^3 - 2\,X^2 + \dfrac{3}{2}\,X - \dfrac{1}{2}.$

a) Écrire la matrice A qui lui est associée. Justifier qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Choisir une valeur explicite simple de $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Après un calcul effectif des premiers termes de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer la limite de cette suite de vecteurs.

c) Vérifier que $Q^{-1}AQ = T$ où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

d) Calculer T^2, T^3 et T^4.

En déduire la valeur de T^{4p+k} pour $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

e) Exprimer pour tout entier naturel n le vecteur $Y_n = Q^{-1}X_n$ en fonction de $Y_0 = Q^{-1}X_0$.

En déduire que les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Phi(\mathcal{R}_P)$ et de $\mathcal{R}_P$ convergent.

Attention : $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans $\Phi(\mathcal{R}_P)$!

I.C.2) **Exemple 2**

Dans cette question, on considère le polynôme : $\quad P(X) = X^3 - 2\,X^2 + 2\,X - 1.$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A associée à $P(X)$.

b) En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_P$ sont périodiques et que, à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_P$, on peut associer trois nombres complexes α, β, γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha + \beta\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

I.C.3) **Exemple 3**
Dans cette question, on considère le polynôme :

$$P(X) = (X-\lambda)(X-\mu)^2$$

où λ et μ désignent deux nombres réels distincts.

a) Préciser la matrice A associée à ce polynôme.

b) On admet que $Q^{-1}AQ = T$ avec $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 2\mu \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$.

En déduire que si le polynôme P admet une racine double, la matrice A qui lui est associée n'est pas diagonalisable.

c) À quelles conditions sur λ et μ a-t-on chacune des propriétés suivantes :

- pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$?
- pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Partie II - De la récurrence linéaire en général

Cette partie aborde l'étude des systèmes d'équations de la forme

$$(\mathcal{H}) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n$$

dans lesquelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne un élément inconnu de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.
Dans la suite de cette partie, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fixée et on lui associe la suite de matrices $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = I_k$ (matrice unité d'ordre k) et $P_{n+1} = A_n P_n$ pour tout entier naturel n.

II.A - Résultats d'existence et d'unicité des solutions

II.A.1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de $(\mathcal{H})$.
Exprimer X_n en fonction de X_0 et de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.A.2) Montrer que le système avec condition initiale

$$(\mathcal{H}_a) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_0 \quad = a \end{cases}$$

admet une solution et une seule pour tout $a \in \mathbb{C}^k$.

II.A.3) On note S l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{H})$.

a) Vérifier que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.

b) On considère l'application

$$\Psi : S \to \mathbb{C}^k$$

telle que $\Psi((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = X_0$.

Montrer que Ψ est isomorphisme.
En déduire que S est de dimension k.

c) En déduire que la famille des k solutions des k systèmes $\begin{cases} X_{n+1} &= A_n X_n \\ X_0 &= e_i \end{cases}$ (où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$) forme une base de l'ensemble S des solutions du système $(\mathcal{H})$.

II.B - Étude d'un exemple

On considère ici le système $X_{n+1} = A_n X_n$ dans lequel, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{bmatrix} \dfrac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

II.B.1) On introduit la notation suivante :

$$\forall n \geqslant 1, h_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p},$$

et $h_0 = 0$. Déterminer la matrice P_n en fonction de n et de h_n.

II.B.2) Expliciter les solutions $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ce système en fonction de n et de x_0, y_0.

II.B.3) Donner une base de l'espace des solutions du système.

II.B.4) Que peut on dire du comportement à l'infini de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

II.C - Problème avec condition initiale au temps n_0

Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^k$, $k \geqslant 2$. On se propose d'étudier le système avec condition initiale $(\mathcal{H}_{n_0,a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_{n_0} \quad = a \end{cases}$

II.C.1) On suppose que pour tout $p \in [0, n_0 - 1]$ la matrice A_p est inversible et on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$, une solution de $(\mathcal{H}_{n_0,a})$.

a) Exprimer d'une façon générale X_{n_0+p} (pour $p \in \mathbb{N}^*$) et X_{n_0-p} (lorsque $1 \leqslant p \leqslant n_0$) à l'aide de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier que le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ admet une solution et une seule.

II.C.2) On suppose qu'il existe $p \in [0, n_0 - 1]$ tel que A_p ne soit pas inversible.

a) Le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut il ne pas avoir de solution ?

b) Le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut il avoir plus d'une solution ?

II.D - Équations avec second membre

Cette question aborde l'étude de systèmes de la forme

$$(\mathcal{G}) : X_{n+1} = A_n X_n + b_n \text{ ou de problèmes } (\mathcal{G}_{n_0,a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n + b_n \\ X_{n_0} \ \ = a \end{cases},$$

où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne encore une suite de matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ fixée, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S(\mathbb{C}^k)$ fixée et n_0 un entier supérieur ou égal à 1.
On suppose, de plus, que pour $p \in [0, n_0 - 1]$, les matrices A_p sont inversibles.

II.D.1) **Existence, unicité et calcul pratique**

a) Montrer que le problème $(\mathcal{G}_{n_0,a})$ admet une solution et une seule pour tout élément a de $\mathbb{C}^k$.

b) Écrire, dans le langage de calcul formel de son choix une procédure qui prend en arguments deux entiers naturels n et n_0, un vecteur a, et retourne le terme d'ordre n de la suite solution du problème $(\mathcal{G}_{n_0,a})$. Sont supposées données les fonctions $n \to A_n$, $n \to b_n$, dans une syntaxe adaptée au langage.

Dans ce qui suit, on suppose que **toutes** les matrices A_n sont inversibles et que :

$$\left((Z_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (Z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

désigne une base quelconque de l'espace des solutions du système homogène $(\mathcal{H})$.

II.D.2) Prouver que pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, $\left(Z_p^1, Z_p^2, \ldots, Z_p^k\right)$ est une base de $\mathbb{C}^k$.

indication : montrer que la famille est libre en observant que le problème $\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_p \ \ = 0 \end{cases}$ *n'admet qu'une solution.*

II.D.3) Pour tout entier naturel n, on note Z_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ dont les k colonnes sont les vecteurs $Z_n^1, Z_n^2, ..., Z_n^k$.

a) Montrer que si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ il existe des suites de complexes $(c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^2)_{n\in\mathbb{N}} ..., (c_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_n^i Z_n^i = Z_n . {}^t\begin{bmatrix} c_n^1 & \ldots & c_n^k \end{bmatrix}.$$

b) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n = {}^t\begin{bmatrix} c_n^1 & \ldots & c_n^k \end{bmatrix}$ la matrice colonne des composantes du vecteur Y_n dans la base $(Z_n^1, ..., Z_n^k)$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_n^i Z_n^i.$

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $\mathcal{G}$ si et seulement si la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n.$$

II.E - Un exemple

Reprenons la suite des matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n = \begin{bmatrix} \dfrac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et introduisons le problème avec second membre : $X_{n+1} = A_n X_n + b_n$ avec $b_n = {}^t\left[\dfrac{1}{n+2}, -h_n\right]$.

II.E.1) Expliciter une suite de matrices $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme dans la question précédente ainsi que la relation de récurrence matricielle $C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n$ établie dans la question précédente.

II.E.2) On considère $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution du problème avec second membre vérifiant la condition

$$Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Donner une expression de C_n puis de Y_n en fonction de n, x_0 et y_0.

• • • FIN • • •
