

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2009

Épreuve de Physique - Filière : MP

Saïd Bouabdellah¹

Éléments de cosmologie

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

I.A - Étude du système Σ formé de A et E

I.A.1) Définition : Le référentiel barycentrique K^* d'un système de points est un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen K et dans lequel le centre d'inertie G du système est immobile. Dans la plus part des cas on choisit G comme origine de ce référentiel. Il est caractérisé par :

$$\vec{P}^* = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\Omega}(K^*/K) = \vec{0}$$

I.A.2) Nous avons :

$$(M + m)\vec{r}_G = M\vec{OE} + m\vec{OA} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{OA} - \vec{OE}$$

en combinant les deux expressions on obtient :

$$\vec{OA} = \vec{r}_G + \frac{M}{M + m} \vec{r} \quad ; \quad \vec{OE} = \vec{r}_G - \frac{m}{M + m} \vec{r}$$

finalement on tire facilement :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \frac{M}{M + m} \vec{v} \quad ; \quad \vec{v}_E = \vec{v}_G - \frac{m}{M + m} \vec{v}$$

I.A.3) Le moment cinétique du système dans K est donné par :

$$\vec{\sigma}_O = m\vec{OA} \wedge \vec{v}_A + M\vec{OE} \wedge \vec{v}_E$$

¹E-mail : said.bouabdellah@gmail.com

D'après l'expression de $\overrightarrow{OE}$, on tire $\overrightarrow{v_E} = \overrightarrow{v_G} - \frac{m}{M+m} \overrightarrow{v}$ et en remplaçant les vecteurs $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_E}$, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ par leurs expressions on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = m_T \overrightarrow{r_G} \wedge \overrightarrow{v_G} + \mu \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{mM}{m+M} \quad \text{et} \quad m_T = M+m$$

Énergie Cinétique :

On sait que $E_c = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_E^2$ et en remplaçant $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_E}$ par leurs expressions et après développement et simplification on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2}m_T v_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

I.A.4) On applique la *RFD* à *A* et *E* dans *K* :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OA}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{F_{E/A}}}{m} \quad ; \quad \frac{d^2 \overrightarrow{OE}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{F_{A/E}}}{M}$$

sachant que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{F_{A/E}} = -\overrightarrow{F_{E/A}}$ (principe des actions réciproques), on obtient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{F_{E/A}}}{\mu} \quad ; \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{F_{E/A}} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^3} \overrightarrow{r}$$

Finalement on trouve

$$\frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} + \frac{\mathcal{G}mM}{\mu r^3} \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$$

I.A.5) D'après le théorème de Koenig relatif au moment cinétique on a :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = m_T \overrightarrow{r_G} \wedge \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{\sigma^*}$$

On tire immédiatement :

$$\overrightarrow{\sigma^*} = \mu \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$$

On dérive dans *K** et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\sigma^*}}{dt} &= \mu \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ &= \mu \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F_{E/A}} \end{aligned}$$

Or, $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{r} \wedge \overrightarrow{F_{E/A}} = \vec{0}$ car ils sont colinéaires.

Finalement

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{0} \quad ; \quad \text{Le moment cinétique dans } K^* \text{ est conservé.}$$

Remarque :

On peut utiliser le théorème du moment cinétique et on trouvera le même résultat.

L'énergie cinétique barycentrique est donnée par : $E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2$.

Calculons sa dérivée :

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \mu \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Or, $\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c^*}{dt} &= (\dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}) \cdot \left(-\frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \vec{e}_r\right) \\ &= -\frac{\mathcal{G}mM\dot{r}}{r^2} \end{aligned}$$

Or, $\dot{r} \neq 0$ donc $\frac{dE_c^*}{dt} \neq 0$, ce qui fait que l'énergie cinétique barycentrique n'est pas conservée.

I.B - Trajectoires hyperboliques de la particule A

I.B.1) D'après la définition du centre d'inertie, on a : $\overrightarrow{GE} = -\frac{m}{M} \overrightarrow{GE}$. Puisque la masse de A est négligeable devant celle de E ($m \ll M$), alors $\overrightarrow{GE} \simeq \vec{0}$ et donc G est confondu avec E. On en déduit que $\vec{r} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GA}$.
 $\vec{v}_A^* = \frac{d\overrightarrow{GA}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$.

De même il est facile de vérifier que $\vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^*$ et $E_c^*(A) = E_c^*$.

I.B.2) On sait que :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}mM}{\mu r^3} \vec{r}$$

Or, $\vec{r} = \overrightarrow{GA}$ et $\mu = m$ car $m \ll M$, donc l'équation différentielle vectorielle devient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{GA}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}M}{GA^3} \overrightarrow{GA}$$

D'autre part on sait que le moment cinétique $\vec{\sigma}^*(A) = m\vec{GA} \wedge \vec{v}_A^*$ est conservé, donc il est constant en direction, en sens et en norme. Puisque $\vec{\sigma}^*(A)$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{GA}$ et $\vec{v}_A^*$, alors la trajectoire de A dans K^* est incluse dans un plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}^*(A)$ et qui contient le point G .

I.B.3)

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* &= m\vec{GA} \wedge \vec{v}_A^* \\ &= r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ \vec{\sigma}^* &= mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z\end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{\sigma}^* \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}$, et donc $C = r^2\dot{\theta}$.

D'autre part, d'après la *RFD*, on a : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\vec{e}_r$ et puisque $\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ alors on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{\mathcal{G}M}{C}\vec{e}_r$$

Calculons la dérivée de $\vec{e}$ par rapport à θ .

$\frac{d\vec{e}}{d\theta} = (1 - \frac{\alpha\mathcal{G}M}{C})\vec{e}_r$, donc $\frac{d\vec{e}}{d\theta} = \vec{0} \implies 1 - \frac{\alpha\mathcal{G}M}{C} = 0$, soit $\alpha = \frac{C}{\mathcal{G}M}$.

Le vecteur excentricité est constant et parallèle au plan du mouvement ce qui fait que sa direction est remarquable et on peut orienter l'axe des (Gy) suivant celui-ci sans perdre de généralité dans l'étude du mouvement car un tel choix ne modifie que l'origine des angles θ_0 .

I.B.4)

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta &= (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta \\ &= r\dot{\theta} \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{C}{r}\end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\alpha C}{r} - 1$. D'autre part $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = e \cos \theta$ et par comparaison des deux expressions on déduit :

$$\frac{p}{r} = 1 + \cos \theta \quad ; \quad p = \alpha C = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$$

La trajectoire de A est hyperbolique si $e > 1$.

I.C - Étude de la trajectoire

I.C.1) Calculons $\vec{\sigma}_0^*$ le moment cinétique de la particule A lorsqu'elle est très éloignée de l'étoile.

$\vec{\sigma}_0^* = m\vec{GA}_0 \wedge \vec{v}_0 = m(\vec{GH} + \vec{HA}_0) \wedge \vec{v}_0$, avec A_0 est la position de la particule à l'infini avant d'arriver au voisinage E , et H est le point d'intersection de (Gy) et Δ . Or, $\vec{HA}_0 \wedge \vec{v}_0$ car ils sont colinéaires donc :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_0^* &= m\vec{b} \wedge \vec{v}_0 \\ &= mb\vec{e}_y \wedge v_0\vec{e}_x \\ \vec{\sigma}_0^* &= -mbv_0\vec{e}_z\end{aligned}$$

Puisque le moment cinétique de A est conservé alors on a :

$$\vec{\sigma}_0^* = \vec{\sigma} \Rightarrow -mbv_0\vec{e}_z = mC\vec{e}_z, \text{ soit } C = -bv_0.$$

On remarque que $C < 0$.

I.C.2) L'énergie mécanique de A dans K^* est conservée donc $E_0^* = E_1^*$. Puisque l'énergie potentielle est nulle à l'infini, alors l'énergie mécanique se réduit à l'énergie cinétique et on écrit : $E_{c_0}^* = E_{c_1}^*$, soit $v_0 = v_1$.

I.C.3) Pour $t \rightarrow -\infty$, on a $\vec{e}_0 = \alpha\vec{v}_0 - \vec{e}_{\theta_0}$.

D'autre part, $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et $\vec{e}_{\theta_0} = -\vec{e}_y$,

donc $\vec{e}_0 = \alpha v_0\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

Pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\vec{e}_1 = \alpha\vec{v}_1 - \vec{e}_{\theta_1}$.

D'autre part, $\vec{v}_1 = \alpha v_0 \cos \Phi \vec{e}_x - \alpha v_0 \sin \Phi \vec{e}_y$

et $\vec{e}_{\theta_1} = \sin \Phi \vec{e}_x + \cos \Phi \vec{e}_y$,

donc $\vec{e}_1 = (\alpha v_0 \cos \Phi - \sin \Phi)\vec{e}_x - (\alpha v_0 \sin \Phi + \cos \Phi)\vec{e}_y$.

Puisque le vecteur excentricité est conservé alors $\vec{e}_1 = \vec{e}_0$, soit

$$\begin{cases} \alpha v_0 \cos \Phi - \sin \Phi = \alpha v_0 \\ \alpha v_0 \sin \Phi + \cos \Phi = -1 \end{cases}$$

Les deux équations étant équivalentes, on choisit par exemple la première, soit $\alpha v_0 \cos \Phi - \sin \Phi = \alpha v_0$ qui s'écrit aussi

$$\alpha v_0(1 - \cos \Phi) = -\sin \Phi$$

D'autre part $\sin \Phi = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2}$ et $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}$, et après simplification on obtient : $\alpha v_0 \sin \frac{\Phi}{2} = -\cos \frac{\Phi}{2}$, soit $\tan \frac{\Phi}{2} = -\frac{1}{\alpha v_0}$.
Puisque $\alpha = \frac{C}{\mathcal{G}M}$ alors $\tan \frac{\Phi}{2} = -\frac{\mathcal{G}M}{Cv_0}$

I.C.4) 1^{ÈRE} **MÉTHODE : Conservation de l'énergie mécanique**

L'énergie mécanique est conservée entre $t \rightarrow -\infty$ et $t = t_m$ l'instant où $r(t)$ est minimale, c-à-d, $\dot{r}(t_m) = 0$. On a

$$E_0^* = E_m^* \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(t_m) - \frac{\mathcal{G}mM}{d}$$

D'autre part $\vec{v}(t_m) = \dot{r}(t_m)\vec{e}_r(t_m) + \frac{C}{d}\vec{e}_\theta(t_m) = \frac{C}{d}\vec{e}_\theta(t_m)$,
donc l'équation devient

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{d^2} - \frac{\mathcal{G}mM}{d}$$

et par conséquent

$$C^2 \left(\frac{1}{d}\right)^2 - 2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{d}\right) - v_0^2 = 0$$

On en déduit que $1/d$ vérifie une équation du second degré. La résolution de cette équation donne une seule solution acceptable :

$$\frac{1}{d} = \frac{2\mathcal{G}M + \sqrt{(2\mathcal{G}M)^2 + 4v_0^2C^2}}{2C^2}$$

Soit

$$d = \frac{C^2}{\mathcal{G}M + \sqrt{\mathcal{G}M^2 + v_0^2C^2}}$$

2^{ÈME} **MÉTHODE : Conservation du vecteur excentricité**

Le vecteur excentricité est conservé entre $t \rightarrow -\infty$ et $t = t_m$, donc

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_m$$

Or, on sait que $\vec{e}_0 = \alpha v_0 \vec{e}_x + \vec{e}_y$ et calculons $\vec{e}_m$:
 $\vec{e}_m = \alpha \vec{v} t_m - \vec{e}_\theta(t_m) = \left(\frac{\alpha C}{d} - 1\right) \vec{e}_\theta(t_m)$.

D'autre part

$$\|\vec{e}_0\|^2 = \|\vec{e}_\theta(t_m)\|^2$$

donne

$$1 + (\alpha v_0)^2 = \left(\frac{\alpha C}{d} - 1 \right)^2$$

On développe et on obtient :

$$\frac{C^2}{d^2} - \frac{2C}{\alpha d} - v_0^2 = 0$$

Sachant que $\alpha = \frac{C}{\mathcal{G}M}$ on obtient :

$$C^2 \left(\frac{1}{d} \right)^2 - 2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{d} \right) - v_0^2 = 0$$

I.C.5) d est une fonction de C . La dérivée de d par rapport à C donne :

$$d' = \frac{C (2\mathcal{G}M \sqrt{G^2 M^2 + v_0 C^2} + 2 G^2 M^2 + v_0 C^2)}{(GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0 C^2})^2 \sqrt{G^2 M^2 + v_0 C^2}}$$

Puisque $C < 0$ alors $d' < 0$ et par conséquent $d(C)$ est une fonction décroissante. D'autre part puisque la fonction tangente est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\frac{\Phi}{2}$ et $-\frac{\mathcal{G}M}{Cv_0}$ ont les mêmes variations pour v_0 fixé. Or, la fonction $-\frac{1}{C}$ est croissante donc $\Phi(C)$ est croissante aussi comme fonction de C . Puisque d et C ont des variations opposées alors $\Phi(d)$ est décroissante.

Commentaire :

On remarque que si le paramètre d'impact (b) augmente, alors C diminue et l'angle de déviation diminue aussi, ce qui fait que plus la lumière est loin de l'étoile plus la déviation est faible.

I.C.6) Dans l'équation de $1/d$ on pose $d = R$, ce qui donne :

$$C^2 = v_0^2 R^2 + 2\mathcal{G}R$$

Puisque $C < 0$ alors la solution admise est

$$C = -\sqrt{v_0^2 R^2 + 2\mathcal{G}R}$$

On remplace dans l'expression de la tangente et on obtient :

$$\tan \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{v_0^2 \sqrt{R(R + \frac{2\mathcal{G}M}{v_0^2})}}$$

On pose $\rho = \frac{2\mathcal{G}M}{v_0^2}$, finalement on obtient

$$\tan \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{v_0^2 \sqrt{R(R + \rho)}}$$

- I.C.7) Pour une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière ($v_0 = c$), le rayon de Schwarzschild est donné par $\rho = \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}$.
AN : $\rho \simeq 2,94 \text{ km}$.

I.D - Déviation de la lumière par le Soleil

- I.D.1) Pour un photon rasant le soleil, on a $\rho \ll R$, on peut négliger ρ devant R , ce qui donne :

$$\tan \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{Rc^2}$$

Or, le terme $\frac{\mathcal{G}M}{Rc^2}$ est négligeable devant 1, donc à l'ordre 1, on écrit :

$$\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{Rc^2} \quad \text{soit} \quad \Phi_0 = \frac{2\mathcal{G}M}{Rc^2}$$

AN : $\Phi_0 \simeq 0,86''$

- I.D.2) La mesure de déviation de la lumière par le soleil doit être réalisée lorsque le soleil s'interpose entre la source (étoiles) et l'observateur sur Terre. Il est à constater que la mesure est réalisée de jour uniquement. D'autre part, on constate que la valeur expérimentale est deux fois plus grande que celle obtenue par la mécanique de Newton, ce qui montre la limitation de la mécanique classique dans l'étude de ce phénomène. Einstein a corrigé la mécanique classique par la relativité générale.

I.E - Effets de lentille gravitationnelle

- I.D.1) L'analyse dimensionnelle montre que κ n'a pas de dimension. Attention, dire "sans dimension", ne veut pas dire "sans unité".

- I.D.2) L'effet de l'étoile sur la lumière incidence ressemble à celui d'une lentille convergente située en E , d'axe optique passant par E et parallèle à la lumière incidente. La source de la lumière étant à l'infinie, la lentille converge la lumière vers le foyer image F' . On a donc :

$$\tan \Phi = \frac{b}{f'} \simeq \Phi \implies f' = \frac{b}{\Phi}$$

Finalement on en déduit

$$f' = \frac{c^2 b^2}{\kappa \mathcal{G} M}$$

- I.D.3) Dans ce cas la distance focale est donnée par :

$$f' = \frac{c^2 R^2}{2\mathcal{G} M}$$

AN : $f' \simeq 1,7 \cdot 10^{-2}$ années-lumière.

- I.D.4) On sait qu'un objet massif joue le rôle d'une lentille convergente par rapport à la lumière qui passe au voisinage de celui-ci. Si une galaxie s'interpose entre l'étoile et la terre, elle focalise la lumière et l'image apparente de l'étoile paraît plus lumineuse.

