BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

SÉRIE L

MATHÉMATIQUES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 3

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

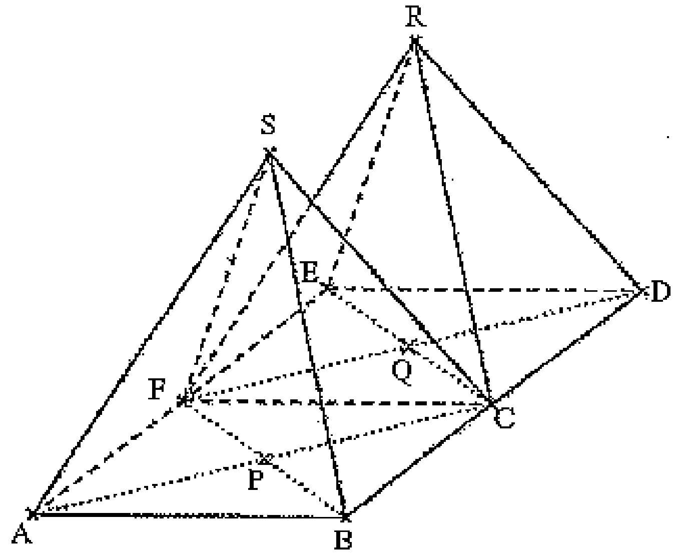
Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.
Les pages 6 et 7 (Annexes 1 et 2) sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (sur 5 points)

On a représenté ci-dessous en perspective parallèle deux pyramides régulières à base carrée SABCF et RFCDE, de même hauteur SP et RQ, où P est le centre du carré ABCF et Q le centre du carré CDEF.

Le plan horizontal contient les six points A, B, C, D, E et F.

Les points A et B sont dans un plan frontal.



On veut reproduire cette figure en perspective centrale sur la feuille de l'Annexe 1, à rendre avec la copie.

On laissera apparents tous les traits de construction.

Dans la perspective centrale, on convient de noter avec une lettre minuscule les images des points. Ainsi **a** est l'image de A, **b** est l'image de B, etc.

Sur la feuille de l'Annexe 1, on a tracé la ligne d'horizon, notée **(h)**, les segments [**ab**] et [**bc**] ainsi que le point **s**.

1) Placer le point de fuite **m** de la droite (BC) et le point de fuite **n** de la droite (AC).
2) Construire l'image **f** du point F. Donner deux propriétés de la perspective centrale qui justifient la construction du point **f**.
3) Construire les points **d** et **e**, images respectives des points D et E.
4) Quel est le point de fuite de la droite (SR) ? On ne demande pas de justification.
5) Terminer la construction des deux pyramides.

Exercice 2 (sur 5 points)

On considère les fonctions u et v définies sur l'intervalle [0 ; 2] par :

$$u(x) = 10\,e^{-2x} \text{ et } v(x) = 0{,}1\,e^{2x}.$$

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = u(x) + v(x)$.

Soient C_u, C_v et C_f les courbes représentant respectivement les fonctions u, v et f dans un repère orthogonal (Ox, Oy).

1) a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de [0 ; 2], $f'(x) = 2\big(v(x) - u(x)\big)$.

c) En déduire que les inéquations $f'(x) > 0$ et $v(x) > u(x)$ ont même ensemble de solutions.

Les courbes C_u et C_v sont tracées sur la feuille de l'Annexe 2. On note α l'abscisse du point d'intersection des deux courbes C_u et C_v.

2) Dans cette question, on résout graphiquement l'inéquation $v(x) > u(x)$.

a) Ajouter sur le graphique le nom des courbes.

b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du nombre α.

c) Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $v(x) > u(x)$.

3) Donner le tableau de variation de la fonction f.

4) Compléter le graphique de l'Annexe 2 en traçant la courbe C_f.

Exercice 3 (sur 5 points)

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Trois amis Alain, Bernard et Corinne vont dîner à l'« Auberge de Bernoulli ». L'aubergiste propose de tirer au sort la personne qui payera le dîner. Il leur présente un sachet opaque qui contient quatre boules, dont trois blanches et une noire. Le premier des trois amis qui tire la boule noire paie tous les repas. Si aucun des trois ne tire la boule noire, l'aubergiste offre le dîner.

Les trois amis veulent comparer deux méthodes différentes de tirer les boules.

Dans cet exercice, on notera :

- A l'événement « Alain tire une boule noire »,
- B l'événement « Bernard tire une boule noire »,
- C l'événement « Corinne tire une boule noire »,
- $\overline{A}, \overline{B}$ et $\overline{C}$ les événements contraires des précédents.

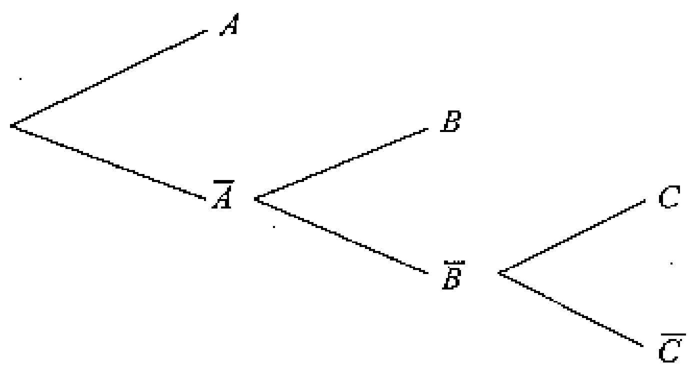
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) Première méthode

Alain, Bernard et Corinne doivent tirer au hasard et l'un après l'autre, dans l'ordre alphabétique de leur prénom, **une boule puis la remettre dans le sachet**. Lorsque la boule noire est tirée, on arrête les tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A, notée $p(A)$, et la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que $\overline{A}$ est réalisé, notée $p_{\overline{A}}(B)$.

b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



c) Calculer $p(B)$ et $p(C)$.

d) Quelle est la probabilité de l'événement « l'aubergiste offre le dîner » ?

2) Deuxième méthode

Alain, Bernard et Corinne doivent tirer au hasard et l'un après l'autre, dans l'ordre alphabétique de leur prénom, **une boule sans la remettre dans le sachet**. Lorsque la boule noire est tirée, on arrête les tirages.

a) Calculer les probabilités des événements A, B et C.

b) Calculer la probabilité de l'événement « l'aubergiste offre le dîner ».

3) Expliquer pourquoi Corinne préfère la première méthode.

Quelle est la méthode la plus favorable à l'aubergiste ?

Exercice 4 (sur 5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	Affecter à N la valeur 0.
	Affecter à U la valeur 10.
Traitement :	Tant que U ≤ 100
	Affecter à N la valeur N+1.
	Affecter à U la valeur 2U – 5.
Sortie :	Afficher N.

Faire fonctionner cet algorithme en complétant certaines des cases du tableau de l'Annexe 2.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On veut démontrer, pour tout nombre entier naturel n, l'égalité (E_n) :

$$u_n = 5 \times 2^n + 5$$

   a) Soit k un nombre entier naturel. Montrer que si l'égalité (E_k) est vraie, alors l'égalité (E_{k+1}) est vraie.

   b) Que reste-t-il à vérifier pour démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 5 \times 2^n + 5$?

Partie C

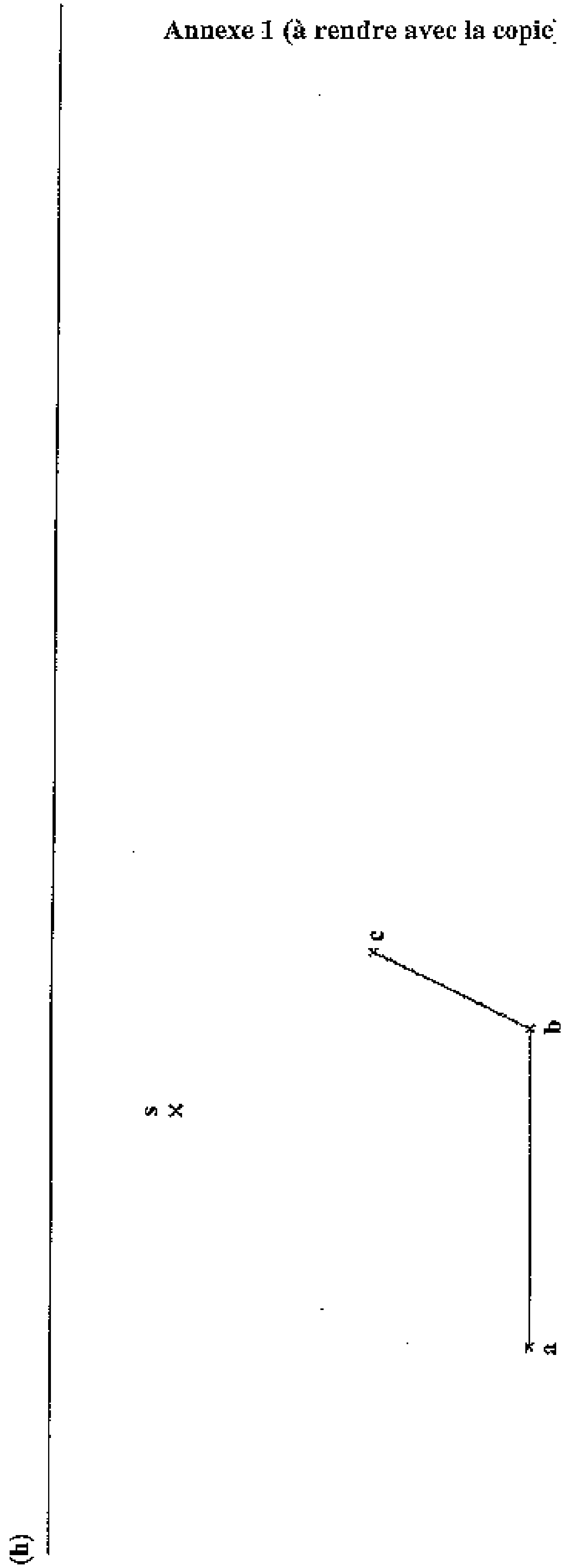
On cherche la plus petite valeur n_0 de n telle que $u_n > 1000$.

1) Expliquer comment modifier l'algorithme de la partie A pour obtenir cette valeur n_0.

2) Déterminer cette valeur n_0.

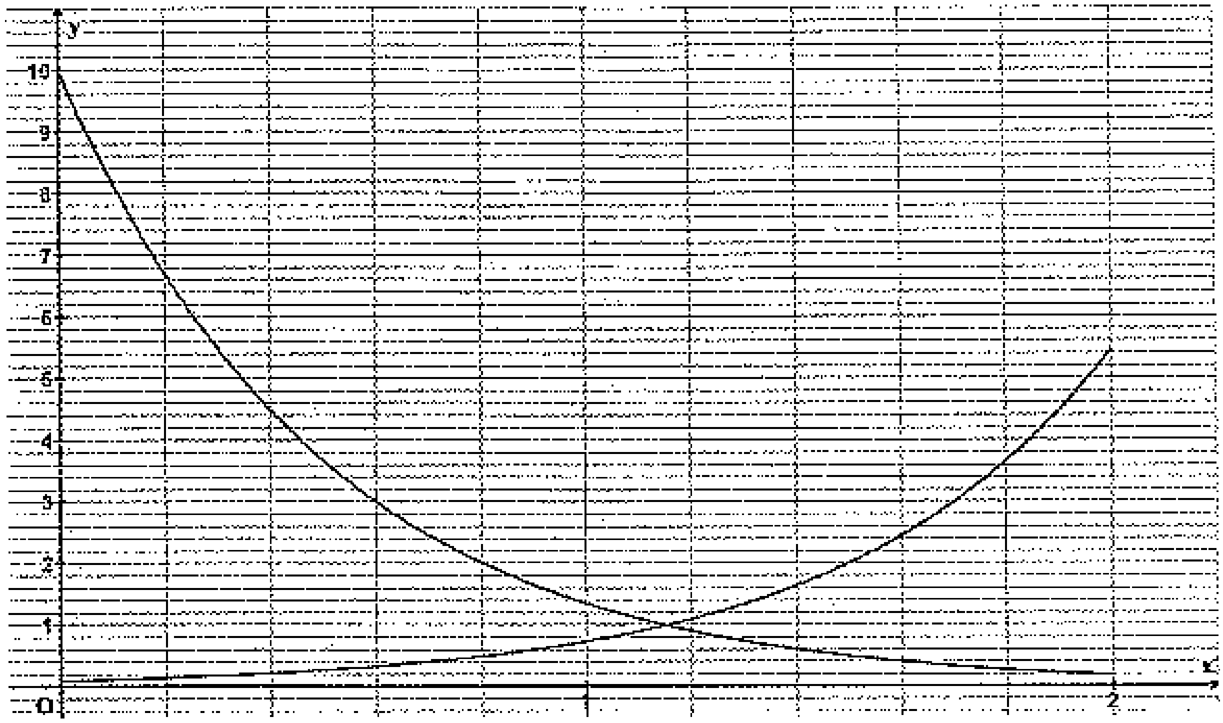
Annexe 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 1



Annexe 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 2



Exercice 4

initialisation											
	N										
	U										
traitement		étape 1	étape 2	étape 3	…	…	…	…	…	…	…
	N										
	U										
sortie											