

Durée : 4 heures

## Correction du baccalauréat S Centres étrangers 17 juin 2008

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : VRAI.

On a  $\overrightarrow{AB}(-3; 1; 5)$  et  $\overrightarrow{AC}(-2; -3; -4)$  : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C définissent un plan.

2. Affirmation 2 : FAUX.

On a  $A \in \mathcal{P} \iff 2 - 2 - 1 + 1 = 0$  : vrai

$C \in \mathcal{P} \iff 0 + 4 + 3 + 1 = 0$  : faux

La droite (AC) n'est donc pas incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

3. Affirmation 3 : VRAI

Dans l'affirmative un vecteur normal à ce plan serait  $\vec{n}(1; 8; -1)$ . On a  $\overrightarrow{AD}(-1; 0; -1)$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 + 8 - 5 = 0$ , donc  $\vec{n}$  est bien orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  ; de même  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -1 + 0 + 1 = 0$ , donc  $\vec{n}$  est bien orthogonal à  $\overrightarrow{AD}$ .

Enfin A appartient à ce plan si ses coordonnées vérifient l'équation proposée soit :  $2 + 8 + 1 - 11 = 0$  qui est vraie

4. Affirmation 4 : FAUX

$$M(x; y; z) \in (AC) \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} x-0 = -2\lambda \\ y+2 = -3\lambda \\ z-3 = 4\lambda \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases} \text{ En prenant } k = -\lambda \text{ on obtient : } \begin{cases} x = 2k \\ y = -2+3k \\ z = 3-4k \end{cases}.$$

5. Affirmation 5 : FAUX

On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25$  : ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, les droites non plus.

6. Affirmation 6 : FAUX

$$\text{On a } d(C, \mathcal{P}) = \frac{|8|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

7. Affirmation 7 : VRAI

On a  $d(D, \mathcal{P}) = \frac{|1-2-2+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . La distance de D au plan est égale au rayon de la sphère, donc la sphère de centre D et de rayon  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  est bien tangente au plan  $\mathcal{P}$ .

8. Affirmation 8 : VRAI

La perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  contenant C a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x-0 = \lambda \\ y+2 = -2\lambda \\ z-3 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2-2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

Les coordonnées du point E commun à cette droite et au plan vérifie l'équation de  $\mathcal{P}$  soit  $\lambda - 2(-2 - 2\lambda) + 3 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda + 4 + 4\lambda + 4 + \lambda = 0 \iff 6\lambda + 8 = 0 \iff \lambda = -\frac{4}{3}$ .

On a donc  $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

## EXERCICE 2

5 points

## Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

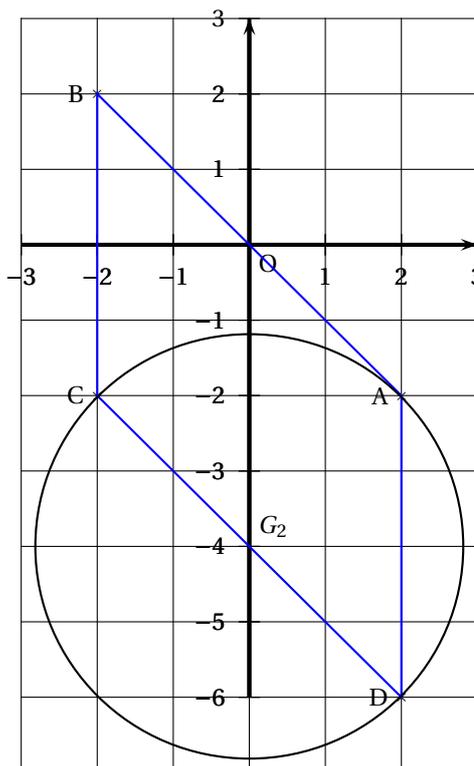
1.  $z^2 + 4z + 8 = 0 \iff (z+2)^2 - 4 + 8 = 0 \iff (z+2)^2 = -4 \iff (z+2)^2 = (2i)^2$ ,  
d'où les deux solutions  $z_1 = -2 + 2i$  et  $z_2 = -2 - 2i$ .

On a  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ .

D'où  $z_1 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ .

De même  $z_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right] = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ .

2. Figure :



- a. Par définition de la rotation :  $z_C - z_O = i(z_B - z_O) \iff z_C = i(-2 + 2i) = -2 - 2i = z_2$
- b. On a :  $z_D - z_A = i(z_C - z_A) \iff z_D = 2 - 2i + i(-2 - 2i - 2 + 2 + 2i) = 2 - 6i$
- c. On a  $\overrightarrow{AB}(-4; 4)$  et  $\overrightarrow{DC}(-4; 4)$ , donc  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff (ABCD)$  est un parallélogramme
3. a. Par définition  $G_\alpha$  existe car  $1 - 1 + \alpha \neq 0$  et  $1\overrightarrow{G_\alpha A} - 1\overrightarrow{G_\alpha B} + \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0} \iff \alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}$  (puisque  $\alpha \neq 0$ ).
- b. L'égalité précédente montre que les vecteurs  $\overrightarrow{CG_\alpha}$  et  $\overrightarrow{BA}$  sont colinéaires, donc que le point  $G_\alpha$  appartient à la parallèle à la droite (AB) contenant C. Comme  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^*$ , donc  $G_\alpha$  ne peut être en C.  
L'ensemble des points  $G_\alpha$  est donc la parallèle à (BA) contenant C ou encore la droite (CD) privée du point C puisque (ABCD) est un parallélogramme.
- c. Par définition (ABCD) est un parallélogramme  $\iff \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \iff D$  est le barycentre du système  $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$ .  
Conclusion  $G_\alpha = D$  pour  $\alpha = 1$ .

On a donc  $G_2$  barycentre de  $(A, 1)$ ,  $(B, -1)$  et  $(C, 2)$  équivaut à  $\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2C} = \vec{0}$ .

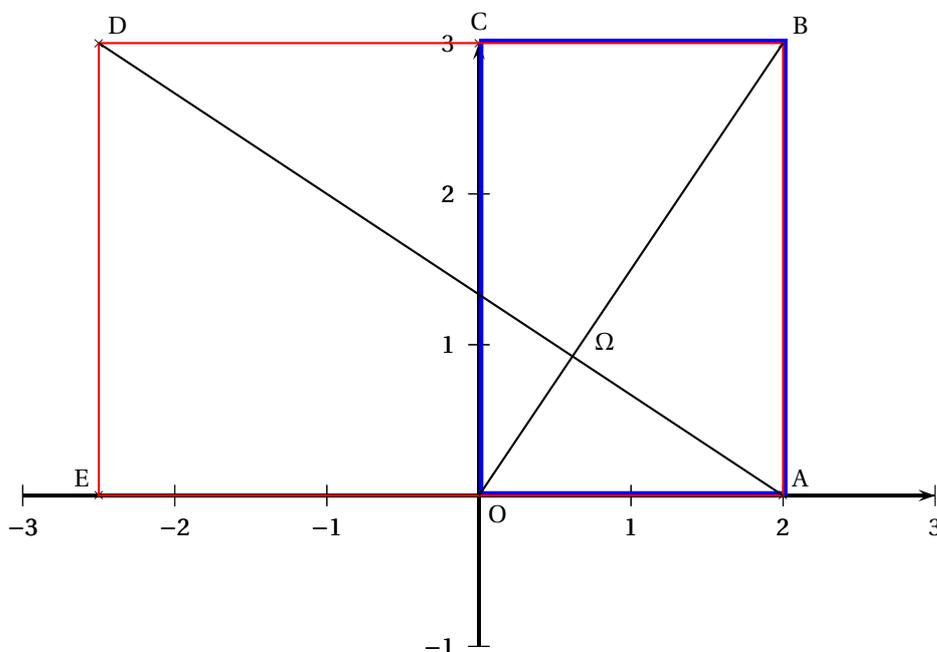
Donc  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2} \iff$

$\|\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{MG_2} - \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2C}\| = 4\sqrt{2} \iff 2\overrightarrow{MG_2} = 4\sqrt{2} \iff$   
 $2G_2M = 4\sqrt{2} \iff G_2M = 2\sqrt{2}$ .

Cette dernière égalité montre que les points  $M$  appartiennent au cercle de centre  $G_2$  de rayon  $2\sqrt{2}$ .

Construction : comme  $\overrightarrow{CG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ , on en déduit que  $G_2$  est le milieu de  $[CD]$  et on a facilement  $G_2D = 2\sqrt{2} = G_2C$ .

L'ensemble cherché est donc le cercle centré au milieu de  $[CD]$  et de diamètre  $[CD]$ .

**EXERCICE 2****5 points****Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****4.** Figure :

2. On a  $\overrightarrow{OA}(2; 0)$  et  $\overrightarrow{CB}(2; 0)$ , donc  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \iff (OABC)$  est un parallélogramme; de plus  $OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$  et  $AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ , donc  $AC = OB$  ce qui montre que  $(OABC)$  est un rectangle.

De même  $\overrightarrow{AE}(-4, 5; 0)$  et  $\overrightarrow{BD}(-4, 5; 0)$ , donc  $(ABDE)$  est un parallélogramme et comme  $(AB)$  est perpendiculaire à  $(AE)$ ,  $(ABDE)$  est un rectangle.

De plus le format (rapport longueur sur largeur) de ces deux rectangles est égal à  $\frac{3}{2}$  : ils sont donc semblables.

**3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE**

a. L'écriture complexe de la similitude complexe  $s$  est  $z' = az + b$ .

$$A = s(O) \iff 2 = b;$$

$$B = s(A) \iff 2 + 3i = b;$$

$$\text{On obtient donc } b = 2 \text{ et } a = \frac{3}{2}i.$$

$$s: z \mapsto z' = \frac{3}{2}iz + 2.$$

- b. On a  $z_{s(B)} = \frac{3}{2}i(2 + 3i) + 2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i = z_D$  et comme les rectangles sont semblables, l'image de C est E.
- c. L'image de la droite (OA) est la droite (AB) : l'angle de la similitude est donc égale à  $\frac{\pi}{2}$ .
- d. On a  $s \circ s(O) = B$ ,  $s \circ s(A) = D$ . Cette composée de similitudes est une similitude d'angle  $\pi$ , donc O,  $\Omega$  et B d'une part, A,  $\Omega$  et D d'autre part sont alignés :  $\Omega$  appartient donc aux droites (OB) et (AD). D'où la position du point  $\Omega$ .

#### 4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

- a. L'écriture complexe de la similitude indirecte est  $z' = a\bar{z} + b$ .  
On a donc  $z_{s(O)} = z_B = az_O + b \iff 2 + 3i = b$ , et d'autre part  
 $z_{s(A)} = z_A \iff 2 = 2a + b$ .  
On en déduit que  $b = 2 + 3i$  et  $a = -\frac{3}{2}i$ .

$$s'; z \mapsto z' = -\frac{3}{2}i\bar{z} + 2 + 3i.$$

- b. On a  $z_{s'(B)} = -\frac{3}{2}i(2 - 3i) + 2 + 3i = -3i - \frac{9}{2} + 2 + 3i = -\frac{5}{2} = z_E$  et comme les rectangles sont semblables l'image de  $\bar{C}$  est D.
- c. Soit  $F(x; y)$  un point fixe de  $s'$ ; on a donc  $x + iy = -\frac{3}{2}i(x - iy) + 2 + 3i$ , ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y + 2 \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il y a donc un seul point fixe, le point A.

De  $z' = -\frac{3}{2}i\bar{z} + 2 + 3i$  et  $2 = -\frac{3}{2}i \times 2 + 2 + 3i$ , on obtient par différence :

$$z' - 2 = -\frac{3}{2}i(\bar{z} - 2).$$

On voit que si on nomme  $\sigma$  la réflexion d'axe (OA); on a  $\sigma(z) = z_1$ , puis  $z' - 2 = -\frac{3}{2}i(z_1 - 2)$ , donc  $M'$  est l'image de  $M_1$  d'affixe  $z_1$  par la similitude directe de rapport  $\frac{3}{2}$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre le point A.

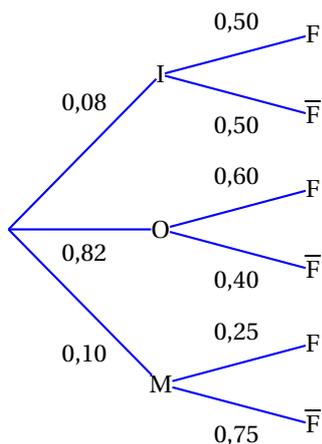
### EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

#### I. Partie A

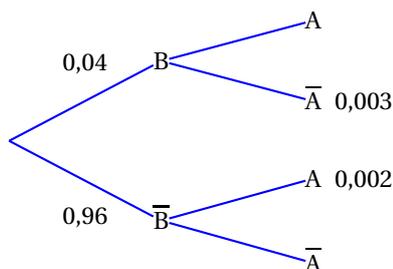
1. Arbre de probabilités :



2. a.  $p(M) = 1 - 0,08 - 0,82 = 0,10$ .  
 b.  $p(M \cap F) = 0,10 \times 0,25 = 0,025$ .  
 c.  $p(F) = p(F \cap I) + p(F \cap O) + p(F \cap M) = 0,08 \times 0,5 + 0,82 \times 0,6 + 0,1 \times 0,25 = 0,557$ .

## II. Partie B

1. On a l'arbre suivant :



$$\text{On a } p(B \cap \bar{A}) = p(B) \times p_B(\bar{A}) \iff p_B(\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(B)} = \frac{0,003}{0,04} = \frac{3}{40}.$$

$$\text{On en déduit que } p_B(A) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}.$$

$$\text{D'où } p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) = 0,04 \times \frac{37}{40} = 0,037.$$

$$2. p(B \cap A) + p(\bar{B} \cap A) = 0,04 \times \frac{37}{40} + 0,002 = 0,037 + 0,002 = 0,039.$$

$$3. p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,037}{0,039} = \frac{37}{39}.$$

## EXERCICE 4

7 points

## Commun à tous les candidats

II. Étude d'une fonction  $f$ 

1. a. La fonction  $u$  somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  est dérivable sur ce même intervalle et

$$\text{On a } u(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0.$$

Conclusion :  $u(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$  et  $u(x) < 0$  sur  $] -\infty; 1[$ .

2. Étude de la fonction  $f$

a. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- b.  $f$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  la seconde fonction quotient ayant un dénominateur non nul : elle est donc

$$\text{dérivable sur } ]0; +\infty[ \text{ et } f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{u(x)}{x^2}.$$

Donc  $f'(x)$  est du signe de  $u(x)$  puisque  $x^3 > 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

D'après la question 1. b. on en déduit que  $f'(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $] -\infty; 1[$ .

D'où le tableau de variations de la fonction  $f$  :

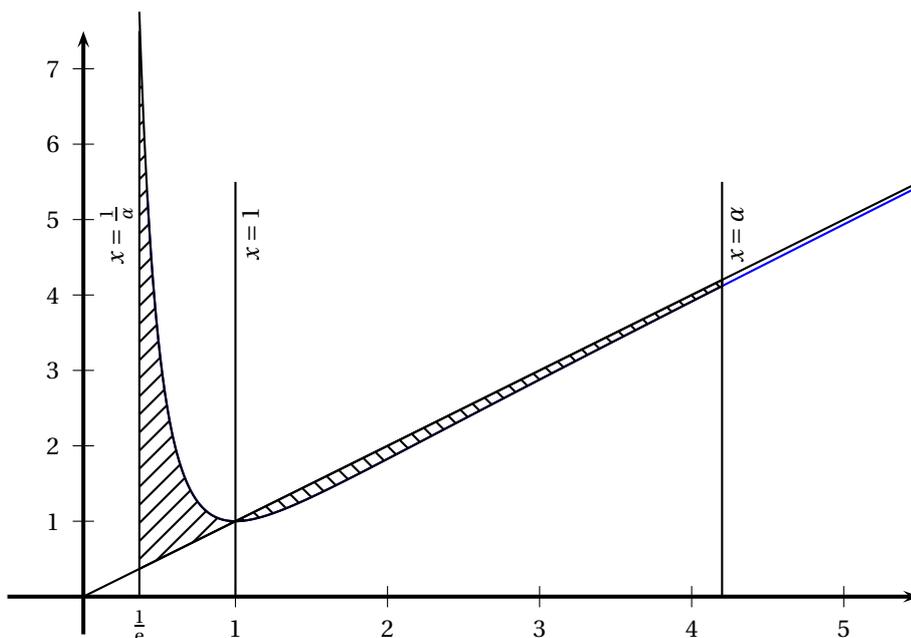
$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		1	$+\infty$

3. Éléments graphiques et tracés.

- a. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$ , ceci montre que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  au voisinage de plus l'infini.

- b. Comme  $-\frac{\ln x}{x^2} = 0_-$  pour  $x > 1$ , ceci montre que la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessous de  $(\Delta)$  à partir du point  $(1; 1)$ .

- c. Figure



### Calculs d'aires

1. On suppose dans cette question que  $\alpha > 1$ . On a vu que pour  $x \geq 1$ ,  $f(x) \leq x$  ;  
donc  $\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^\alpha \left( x - \left[ x - \frac{\ln x}{x^2} \right] \right) dx = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions étant dérivables sur  $[1 ; +\infty[$  on peut intégrer par parties et ;

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^\alpha = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 0 + 1 = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

2. Comme  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$ , on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \ell = 1$$

3. Comme  $e > 2$ , on a  $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1$ . On a vu que dans ce cas la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus de la droite  $(\Delta)$ , donc :

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left[ -\frac{\ln x}{x^2} \right] dx$$

En intégrant par parties comme précédemment les fonctions étant dérivables sur  $\left[ \frac{1}{e} ; 1 \right]$ , on obtient

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \left[ \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^1 = 1 - \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1}{\frac{1}{e}} = 1 = \ell.$$