Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. (E')$\Longleftrightarrow$ $y' = -2y$. D'après le cours, les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante réelle.
2. En particulier, avec $C = \dfrac{9}{2}$, on obtient la fonction h.
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 9\mathrm{e}^{-3x}$. Par conséquent, pour tout réel x :

$$g'(x) + 2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

ce qui prouve que g est bien solution de (E).

4. Comme $f = g + h$, on a $f' = g' + h'$, donc, pour tout réel x :

$$f'(x) + 2f(x) = \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{3\mathrm{e}^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_{0} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

et f est alors bien solution de (E).

Partie B :

1. $f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2.
   - **Limite de f en $-\infty$.**
     $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x} = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$; on en déduit, par opérations sur les limites dans l'expression de $f(x)$ obtenue à la question B1 que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   - **Limite de f en $+\infty$.**
     $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x} = 0$. De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x} = 0$; on en déduit par opérations sur les limites dans l'expression initiale de $f(x)$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (combinaison simple de fonctions qui le sont), et, pour tout réel x :

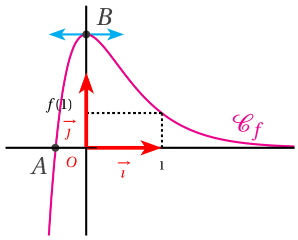
$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} - 3 \times (-3)\mathrm{e}^{-3x} = -9\mathrm{e}^{-2x} + 9\mathrm{e}^{-3x} = 9\mathrm{e}^{-3x}\left(-\mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

Comme, pour tout réel x, $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-\mathrm{e}^x + 1$.
Or : $-\mathrm{e}^x + 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow 0 \leqslant x$, donc $f'(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$.
Par ailleurs $f(0) = \dfrac{9}{2}e^0 - 3e^0 = \dfrac{3}{2}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

4. • **Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe** (Ox).
On cherche les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ tels que $f(x)=0$.
D'après l'expression de la question B1, et comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x}\neq 0$, on a :
$f(x)=0 \iff \dfrac{3}{2}=\mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(\frac{3}{2}\right)=-x \iff x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\simeq -0{,}4$ (à 0,01 près).
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right);0\right)$.
• **Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe** (Oy).
Il s'agit du point de coordonnées $B(0\,;f(0))$ c'est-à-dire $\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$.

5. $f(1)=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}-3\mathrm{e}^{-3}\simeq 0{,}46$ (à 0,01 près). L'allure de $\mathscr{C}_f$ est alors la suivante :



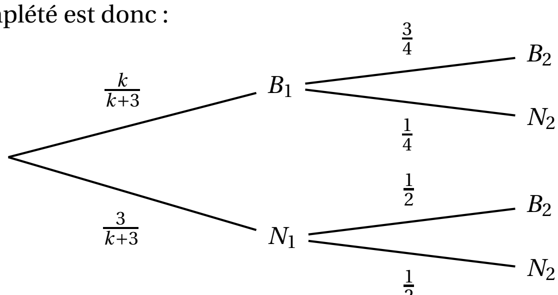
6. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x\mapsto -\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-3x}$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction f est positive, l'aire A cherchée est donc égale à :

$$A=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1=\left(-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}\right)-\left(-\frac{9}{4}+1\right)=-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}+\frac{5}{4}\ \mathrm{cm}^2.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. **a.** Dans U_1 il y a k boules blanches et 3 noires, soit $k+3$ boules au total ; on a donc : $p(B_1)=\frac{k}{k+3}$ et $p(N_1)=\frac{3}{k+3}$.
Si l'on a tiré une boule blanche de U_1 il y a maintenant 3 boules blanches et une boule noire dans U_2 ; en revanche si l'on a tiré une boule noire de U_1 il y a maintenant 2 boules blanches et 2 boules noires dans U_2. L'arbre pondéré complété est donc :



b. Les événements B_1 et N_1 étant contraires, on a $B_2=(B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap B_2)$, et la formule des probabilités totales permet alors d'écrire que :

$$p(B_2)=\frac{3}{4}\times\frac{k}{k+3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{k+3}=\frac{3k+6}{4k+12},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. **a.** Si le joueur gagne, il reçoit 12 euros et en a misé 8, son gain est donc de 4 euros : $X=4$; s'il perd, il perd sa mise et alors $X=-8$.

b. $p(X=4)=p(B_2)=\dfrac{3\times 12+6}{4\times 12+12}=\dfrac{42}{60}=\dfrac{7}{10}$.
$p(X=-8)=p\left(\overline{X=4}\right)=1-p(X=4)=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}$. On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x_i	-8	4	Total
$p(X=x_i)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{7}{10}$	1

c. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \dfrac{3}{10}\times(-8)+\dfrac{7}{10}\times 4 = \dfrac{4}{10} = 0{,}40$ euros.

d. Le jeu est favorable au joueur car $E(X) > 0$.

3. Les épreuves successives étant identiques et indépendantes, on a affaire à un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu l'événement B_2 suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{7}{10}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff p\left(\overline{Y=0}\right) \geqslant 0{,}99\\
&\iff 1 - p(Y=0) \geqslant 0{,}99\\
&\iff 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{7}{10}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^n \geqslant 0{,}99\\
&\iff 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n \geqslant 0{,}99\\
&\iff 0{,}01 \geqslant \left(\frac{3}{10}\right)^n\\
&\iff \ln(0{,}01) \geqslant n\ln\left(\frac{3}{10}\right)\\
&\iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \leqslant n.
\end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \simeq 3{,}82$, le plus petit entier n répondant à la question est 4.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $11\times(-7) - 26\times(-3) = -77 + 78 = 1$, donc le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).

2.
- Soit $(x; y)$ une solution de (E), on a alors $11x - 26y = 1$ et d'après la question précédente $11\times(-7) - 26\times(-3) = 1$ donc $11x - 26y = 11\times(-7) - 26\times(-3)$. On en déduit que $11(x+7) = 26(y+3)$. Ainsi 26 divise $11(x+7)$, or 26 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique donc que 26 divise $x+7$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x+7 = 26k$, c'est-à-dire $x = -7+26k$. On a alors $11\times 26k = 26(y+3)$, d'où, en divisant par 26 : $11k = y+3$, d'où $y = -3+11k$.
  Ainsi, si $(x; y)$ est solution de (E), il existe un entier k tel que $(x; y) = (-7+26k; -3+11k)$.
- Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions de (E) ; en effet : $11\times(-7+26k) - 26\times(-3+11k) = -77+286k+78-286k = 1$.
- En conclusion, les solutions de (E) sont les couples de la forme $(-7+26k; -3+11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(u; v)$ est solution de (E) avec $0 \leqslant u \leqslant 25$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $u = -7+26k$, $v = -3+11k-$ et $0 \leqslant -7+26k \leqslant 25$. Cela conduit à $7 \leqslant 26k \leqslant 32$, et $k = 1$ est la seule possibilité. L'unique couple répondant à la question est donc $(19; 8)$.

Partie B

1. La lettre W est chiffrée par $x = 22$. Or $11\times 22 + 8 \equiv 16$ (modulo 26), donc $y = 16$ qui correspond à la lettre Q.

2. a. • Soit x et j deux entiers relatifs tels que $11x \equiv j$ (modulo 26). Alors, en multipliant par 19 : $19 \times 11x \equiv 19j$ (modulo 26). Or $19 \times 11 = 209$ et $209 \equiv 1$ (modulo 26), donc $x \equiv 19j$ (modulo 26).
   • Réciproquement, si $x \equiv 19j$ (modulo 26), alors, en multipliant par 11 : $11x \equiv 11 \times 19j$ (modulo 26), d'où $11x \equiv j$ (modulo 26). L'équivalence est donc démontrée.

   b. Soit y un entier compris entre 0 et 25, il s'agit de trouver un entier x compris entre 0 et 25 tel que : $11x + 8 \equiv y$ (modulo 26). Nécessairement on doit avoir : $11x \equiv y - 8$ (modulo 26), ce qui équivaut, d'après la question précédente, à $x \equiv 19(y-8)$ (modulo 26). Le procédé de décodage est donc le suivant :
   • on chiffre la lettre à décoder par un nombre entier y compris entre 0 et 25;
   • on calcule le reste x de la division euclidienne de $19(y-8)$ par 26;
   • on déchiffre alors x pour obtenir la lettre décodée.

   c. W est chiffré par $y = 22$. Or $19 \times (22-8) \equiv 6$ (modulo 26), donc $x = 6$, ce qui correspond à la lettre G.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. A;
2. C;
3. B;
4. C.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **Un exemple.**
   a. Voir figure.
   b. Le point K' a pour affixe $z_{K'} = \dfrac{-(1+i)^2}{1+i-i} = -2i$.
   c. Voir figure.

2. **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.**
   a. L' a pour affixe $z_{L'} = \dfrac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{\frac{i}{2}-i} = \dfrac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{-\frac{i}{2}} = \dfrac{i}{2}$. On remarque ainsi que $L' = L$.
   b. Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq i$. Alors :

$$\left(f(M) = M\right) \iff \left(z = \frac{-z^2}{z-i}\right) \iff \left(z(z-i) = -z^2\right) \iff \left(z(2z-i) = 0\right) \iff \left(z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}\right).$$

   Il n'y a donc que deux points invariants par f : O et L.

3. **Un procédé de construction.**
   a. On a : $g = \dfrac{i+z+z'}{3} = \dfrac{i+z-\frac{z^2}{z-i}}{3} = \dfrac{(z-i)(z+i)-z^2}{3(z-i)} = \dfrac{z^2+1-z^2}{3(z-i)} = \dfrac{1}{3(z-i)}$.
   L'égalité est vérifiée.
   b. Soit M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors $AM = r$, donc $|z-i| = r$. D'après la relation précédente, cela implique que $|g| = \dfrac{1}{3r}$, donc que G appartient au cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.
   c. D'après la relation de la question 3a :

$$\arg g = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg 3 - \arg(z-i) = -\arg(z-i) = -\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AM}\right).$$

d. Construction du point D' :

- on construit le point G, point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{2}{3}$ et de la demi-droite d'origine O faisant un angle de $-(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AD})$ avec l'horizontale ;
- G est le centre de gravité du triangle ADD', en notant J le milieu de $[AD]$ on a donc : $\overrightarrow{JD'} = 3\overrightarrow{JG}$.