Correction du baccalauréat S Asie 18 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

A -Vrai ou faux ?

1. Faux : contre-exemple : il suffit de prendre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ perpendiculaires à $\mathcal{P}_2$.
2. Faux : contre-exemple : on reprend l'exemple précédent.
3. Vrai : si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre.
4. Faux : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles : si la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}_1$ elle n'est pas sécante avec $\mathcal{P}_2$.

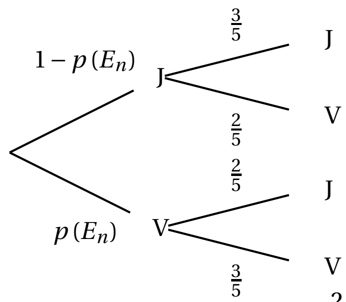
B - Intersection de trois plans donnés

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}_1(1\,;\,1\,;\,-1)$ est normal à $\mathcal{P}_1$, $\overrightarrow{n}_2(2\,;\,1\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}_2$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les deux plans sont donc sécants.
   Il faut résoudre :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 0\\ 2x+y+z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 0\\ -y+3z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3z+3+z\\ y &=& 3z-3\\ z &=& z\end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t+3\\ y &=& 3t-3\\ z &=& t\end{array}\right.$$
   qui est une représentation paramétrique de la droite Δ commune aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$
2. Un point de Δ appartient à $\mathcal{P}_3$ si et seulement si :
   $$-2t+3+2(3t-3)-4(t)+3=0 \iff -2t+6t-4t+3-6+3=0$$
   qui est vrai quel que soit $t\in\mathbb{R}$.
   Ceci signifie que tout point de Δ appartient à $\mathcal{P}_3$.
   Conclusion : $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\Delta$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence
   a. On a $p\left(E_1\right)=\dfrac{2}{5}$, $p_{E_1}\left(E_2\right)=\dfrac{3}{5}$ et $p_{\overline{E_1}}\left(E_2\right)=\dfrac{2}{5}$.
   D'après la formule des probabilités totales appliquée à E_1 et à $\overline{E_1}$:
   $p\left(E_2\right)=p\left(E_1\cap E_2\right)+p\left(E_1\cap\overline{E_2}\right)=p\left(E_1\right)\times p_{E_1}\left(E_2\right)+p\left(\overline{E_1}\right)\times p_{\overline{E_1}}\left(E_2\right)=$
   $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\left(1-\dfrac{2}{5}\right)\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{12}{25}=0,48.$
   b. Arbre pondéré :



D'après la loi des probabilités totales on a $p(E_{n+1}) = \dfrac{2}{5}\left(1-p(E_n)\right) + \dfrac{3}{5}p(E_n) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

a. Démonstration par récurrence :

- Initialisation : $u_1 = \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{2}$: vrai ;
- Hérédité : supposons que $u_n < \dfrac{1}{2}$; alors $\dfrac{1}{5}u_n < \dfrac{1}{10} \iff \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{5} \iff u_{n+1} < \dfrac{5}{10}$. Soit finalement $u_{n+1} < \dfrac{1}{2}$.

On a démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout naturel $n > 0$,
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} - u_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}u_n = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2} - u_n\right)$.

D'après la question précédente $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est croissante

c. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.

ℓ vérifie la relation de récurrence : $\ell = \dfrac{1}{5}\ell + \dfrac{2}{5} \iff 5\ell = \ell + 2 \iff 4\ell = 2 \iff \ell = \dfrac{1}{2}$.

3. **a.** On a de façon évidente $u_n = p(E_n)$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} p(E_n) = \dfrac{1}{2}$.

b. Considérons la suite des différences de $p(E_n)$ avec sa limite 0,5, soit
$v_n = p(E_n) - 0{,}5$.
On a $v_{n+1} = p(E_{n+1}) - 0{,}5$.

La relation de récurrence devient : $v_{n+1} + 0{,}5 = \dfrac{1}{5}(v_n + 0{,}5) + \dfrac{2}{5} \iff v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} \times v_1$ soit $p(E_n) - 0{,}5 = \dfrac{1}{5^{n-1}}\left(\dfrac{2}{5} - 0{,}5\right) \iff p(E_n) = 0{,}5 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\dfrac{1}{10}$.

On a donc $0{,}49999 \leqslant p(E_n) \iff \dfrac{1}{2\times 5^n} < 10^{-5} \iff 5^n > 50\,000 \iff 5^{n-1} > 10^4 \iff (n-1)\ln 5 > 4\ln 10 \iff n-1 > \dfrac{4\ln 10}{\ln 5} \iff n > 1 + \dfrac{4\ln 10}{\ln 5} \approx 6{,}7$.
Il faut donc prendre $n = 7$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
A - Représentation graphique de quelques ensembles

1. $x \equiv 2 \quad$ (modulo 3) et $y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3. $x \equiv y \quad$ (modulo 3), sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Le couple $(-1\ ;\ -2)$ est un couple solution.
2. On a donc :
$\left\{\begin{array}{lll} 7\times(-1)-4\times(-2) & = & 1 \\ 7x-4y & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $7(x+1)-4(y+2)=0 \iff$
$7(x+1) = 4(y+2) \quad (1)$.
D'après le théorème de Gauss, 7 divise $4(y+2)$ mais est premier avec 4 : il divise donc $y+2$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y+2 = 7k \iff y = 7k-2$.
En reportant dans (1), $7(x+1) = 4\times 7k \iff x+1 = 4k \iff x = 4k-1$.
Les couples solutions sont de la forme $(4k-1\ ;\ 7k-2)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Inversement on vérifie qu'un couple $(4k-1\ ;\ 7k-2)$ vérifie l'équation proposée car $7(4k-1)-4(7k-2) = 28k-7-28k+8 = 1$.
3. $(x\ ;\ y)$ appartient à $R_{4,7} \iff \left\{\begin{array}{lll} 0 \leqslant & 4k-1 \leqslant & 4 \\ 0 \leqslant & 7k-2 \leqslant & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 1 \leqslant & 4k \leqslant & 5 \\ 2 \leqslant & 7k \leqslant & 9 \end{array}\right. \iff$
$k = 1$
Il y a donc une seule solution : le couple $(3\ ;\ 5)$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

1. $M(x\ ;\ y) \in [\mathrm{O}A] \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{O}M} = k\overrightarrow{\mathrm{O}A}$,
$k \in [0\ ;\ 1] \iff x = ka,\ y = kb,\ k \in [0\ ;\ 1] \iff 0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ x = ka,$
$y = kb \iff 0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ k = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \iff 0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b\ ;\ ay = bx.$
2. D'après la question précédente a divise bx mais est premier avec b : il divise donc x et de même b divise y. Or on a vu que :
$0 \leqslant x \leqslant a$ ce qui implique que $x = 0$ ou $x = a$ et de même $y = 0$ ou $y = b$. Les points solutions sont donc $\mathrm{O}(0\ ;\ 0)$ et $A(a\ ;\ b)$.
3. Considérons le pgcd d des nombres a et b. On a $a = da'$ et $b = db'$ avec $0 < a' < a$ et $0 < b' < b$.
L'égalité $d = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ entraîne $a'b = ab'$. Donc le point de coordonnées $(a'\ ;\ b')$ appartient au segment $[\mathrm{O}A]$.
Il existe donc au moins un autre point du réseau sur le segment $[\mathrm{O}A]$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

A - Quelques propriétés

1. $z \neq 0$ et $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow \left|z'\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|z'\right| = \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{\left|\overline{z}\right|} \iff \left|z'\right| \times \left|\overline{z}\right| = 1.$
Pour les arguments : $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow \arg\left(z'\right) = \arg\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = \arg(-1) - \arg\left(\overline{z}\right) = \pi - (-\arg z) =$
$\pi + \arg z = \arg(z) + \pi$.

2. Ceci résulte de la question précédente ; de plus les points sont dans l'ordre M, O et M'.
3. Pour $z \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z}(z-1) = 1 - \dfrac{1}{z} = 1 - \overline{\dfrac{1}{\overline{z}}} = 1 + \overline{z'} = \overline{1} + \overline{z'} = \overline{z'+1}$.

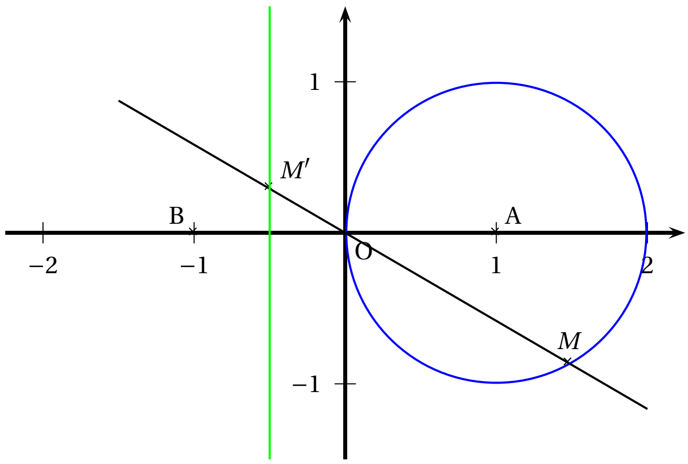
B - Construction de l'image d'un point

1. $|z-1| = 1 \iff \mathrm{A}M = 1 \iff M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.
2. **a.** $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1) \Rightarrow \left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right| \iff \left|z'+1\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \times |z-1| \iff \left|z'+1\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ (car $M \in \mathscr{C} \iff |z-1| = 1$) $\iff \left|z'+1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{\overline{z}}}\right| \iff \left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   Cette dernière égalité s'interprète géométriquement par : BM' = OM' qui signifie que M' est équidistant de B et de O, autrement dit M' appartient à la médiatrice de [OB].

   b. $\left|z'+1\right| = \left|z'\right| \iff \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}+1\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right| \iff \left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{\left|\overline{z}\right|} \iff \left|\overline{z}-1\right| = 1 \iff |z-1| = 1$.

   La réciproque est donc vraie : on a bien OM = 1.
3. Figure



Construction de l'image d'un point de $\mathscr{C}$:

– M' est aligné avec O et M : il appartient à la droite (OM) ;
– M'B = M'O, donc M' appartient à la médiatrice de [OB] ;
– M' est donc le point commmun à la droite (OM) et à la médiatrice de [OB].

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

A - Restitution organisée de connaissances

B - Étude d'une fonction

1. La fonction f est le produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $-x$, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

   La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   Le maximum est obtenu pour $x = 0$, $f(0) = 1 \times \mathrm{e}^{-0} = 1$.

   Limites :

– $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$.
D'après la R. O. C. par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

– $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment. Voir ci-dessous

C - Étude d'une famille de fonctions

1. **a.** On a $f_0(x) = x+1$: c'est une fonction affine

b. Les points communs à $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ ont des coordonnées qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & x+1 \\ y & = & (x+1)\mathrm{e}^x \end{array}\right. \Rightarrow x+1 = (x+1)\mathrm{e}^x \iff (x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right) = 0 \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+1 & = & 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ \mathrm{e}^x & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc deux points commune : le point $(0 ; 1)$ et le point $(-1 ; 0)$.

On remarque que quel que soit k, $f_k(-1) = 0$, donc le point $(-1 ; 0)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

De même, quel que soit k, $f_k(0) = 1$, donc le point $(0 ; 1)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

2. Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\mathrm{e}^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{(k+1)x} - (x+1)\mathrm{e}^{kx} = (x+1)\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$ qui est du signe du produit ci-dessus car $\mathrm{e}^{kx} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que :

– pour $x < -1$ et pour $x > 0$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathscr{C}_k$
– pour $-1 < x < 0$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au dessous de $\mathscr{C}_k$
– les deux courbes se coupent en $x = -1$ et en $x = 0$.

f_k produit de fonction dérivable est dérivable et $f_k'(x) = \mathrm{e}^{kx} + k(x+1)\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}(kx + k + 1)$.

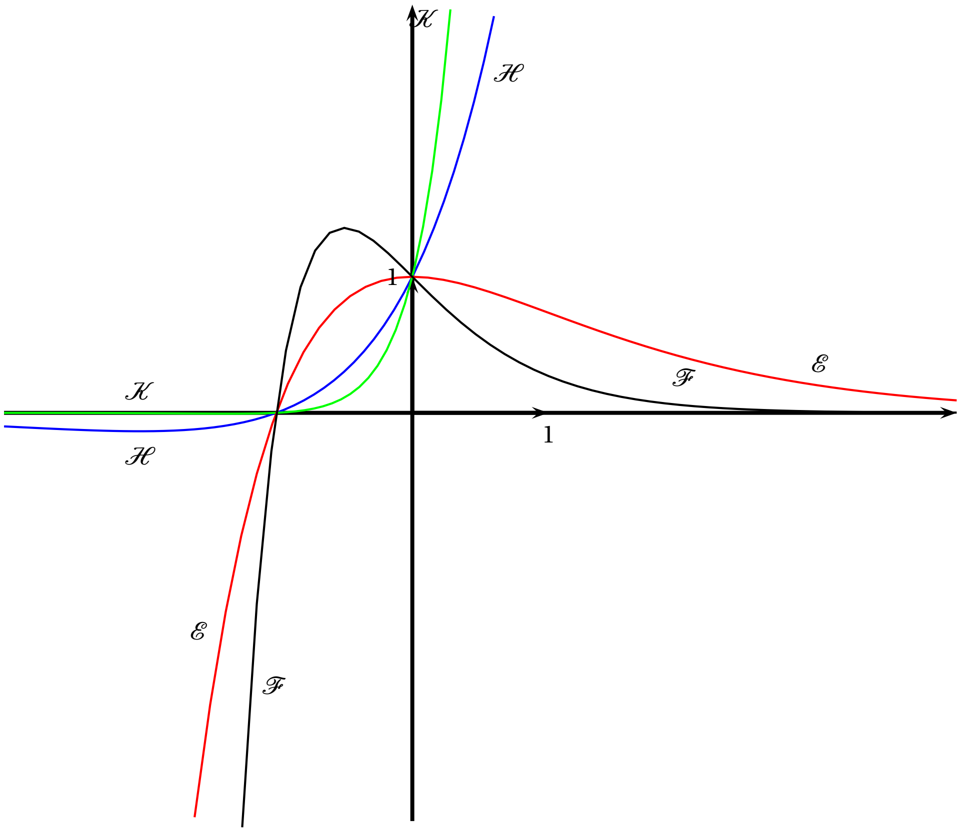
Comme $\mathrm{e}^{kx} > 0$ quel que soit x et quel que soit k, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $kx + k + 1$.

– Si $k > 0$, alors $kx + k + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{k+1}{k}$, donc $f_k'(x) > 0$ si $x > -\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est croissante sur cet intervalle et $f_k'(x) < 0$ si $x < -\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est décroissante sur cet intervalle.

– Si $k < 0$, alors $kx + k + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{k+1}{k}$.

$f_k'(x) > 0 \iff kx + k + 1 > 0 \iff k + 1 > -kx \iff x < -\dfrac{k+1}{k}$. La fonction f_k est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\, -\dfrac{k+1}{k}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{k+1}{k}\,;\,+\infty\right[$.

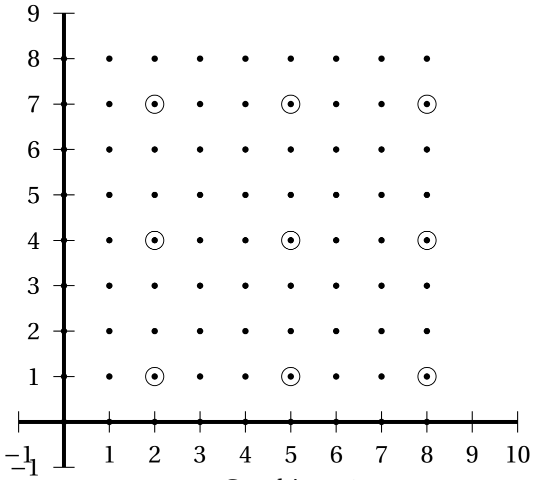
3. En utilisant la question précédente, on peut dire que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ correspondent à des valeurs de k négatives.
Plus précisement la courbe $\mathscr{E}$ croît sur $]-\infty\,;\,0[$ ce qui correspond à la valeur $k = -1$.
Donc $\mathscr{E}$ représente la fonction f_{-1} et par conséquent $\mathscr{F}$ représente la fonction f_{-3}.
Pour les valeurs de k positives on utilise les résultats de la question **2.** : pour $x > 0$, on constate que que $\mathscr{K}$ est au dessus de $\mathscr{H}$; donc $\mathscr{H}$ représente f_1 et $\mathscr{K}$ représente f_2.



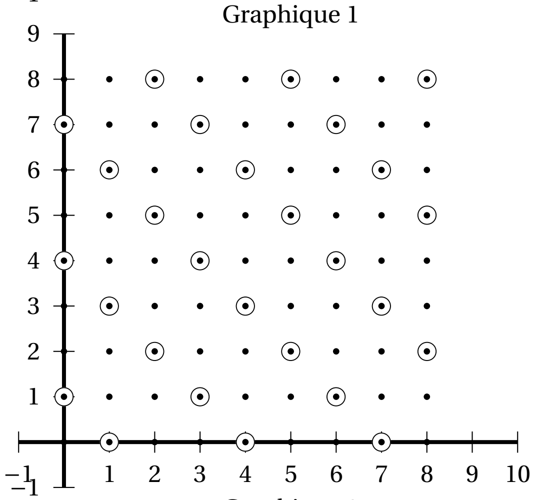
D - Calcul d'une aire plane

1. $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} (t+1)\text{e}^{-t}\,\text{d}t$. Soit
   $\left\{\begin{array}{l c l} u(t) & = & t+1 \\ v'(t) & = & \text{e}^{-t}\end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l c l} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & -\text{e}^{-t}\end{array}\right.$
   Toutes ces fonctions sont dérivables donc continues sur $[0~;~\lambda]$, on peut donc intégrer par parties :
   $\mathscr{A}(\lambda) = \left[-(t+1)\text{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} + \displaystyle\int_0^{\lambda} \text{e}^{-t}\,\text{d}t = \left[-(t+1)\text{e}^{-t} - \text{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} = \left[-(t+2)\text{e}^{-t}\right]_0^{\lambda} =$
   $-(\lambda+2)\text{e}^{-\lambda} + 2 = 2 - (\lambda+2)\text{e}^{-\lambda}$.
2. Comme $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \text{e}^{-\lambda} = 0$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\text{e}^{-\lambda} = 0$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 2$.

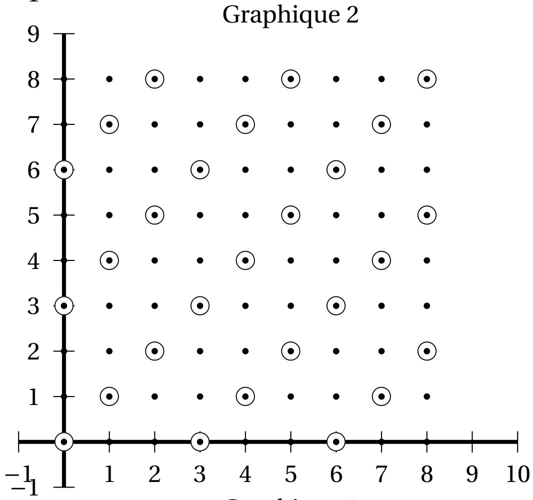
Annexe 1 - exercice 3 (spécialité mathématique) - À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3