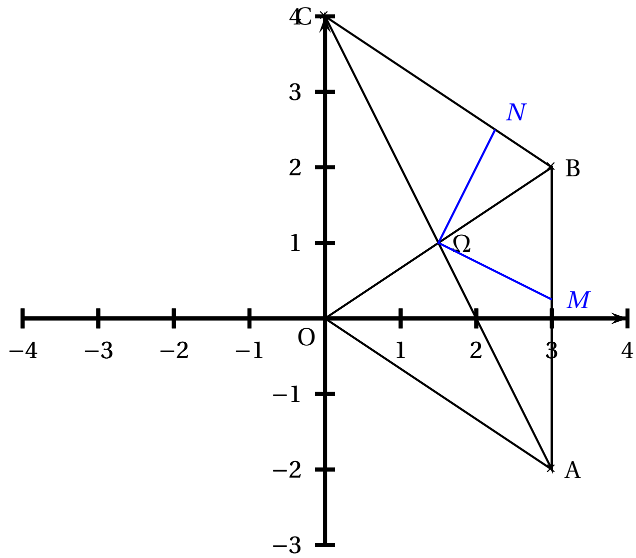
Correction du baccalauréat S Polynésie juin 2008

Exercice 1 **4 points**

1. $z^2-6z+13=0 \iff (z-3)^2-9+13=0 \iff (z-3)^2+4=0 \iff (z-3)^2=(2\text{i})^2$.
Les solutions sont donc $3+2\text{i}$ et $3-2\text{i}$

2. Figure :



3. On a $\overrightarrow{\text{OC}}\,(0\ ;\ 4)$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\,(0\ ;\ 4)$,, donc $\overrightarrow{\text{OC}}=\overrightarrow{\text{AB}} \iff$ OABC est un parallélogramme.

4. Le centre de OABC est le milieu de [OB] soit $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 1\right)$.

5. Ω est l'isobarycentre des points A, B, C et O. Donc $\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}+\overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{OC}}=\overrightarrow{0}$.
On a donc :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{O}}+\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\|=12 \iff \left\|4\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega\text{O}}+\overrightarrow{\Omega\text{A}}+\overrightarrow{\Omega\text{B}}+\overrightarrow{\Omega\text{C}}\right\|=12$$

$$\iff \left|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12 \iff \Omega M=3$$

L'ensemble des points M est donc le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6.

a. On a donc $z_M=3+\beta\text{i}$.
On a par définition de la rotation : $z_N-z_\Omega=\text{i}\,(z_M-z_\Omega) \iff$
$z_N=\dfrac{3}{2}+\text{i}+\text{i}\left(3+\beta-\dfrac{3}{2}-\text{i}\right)=\dfrac{3}{2}+\text{i}+3\text{i}-\beta-\dfrac{3}{2}-\text{i}=\dfrac{5}{2}-\beta+\dfrac{5}{2}\text{i}$.

b. La droite (BC) a un coefficient directeur de $-\dfrac{2}{3}$ et contient le point C(0 ; 4) : une de ses équations est donc $y=-\dfrac{2}{3}x+4$.
$N\in(\text{BC}) \iff \dfrac{5}{2}=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{2}-\beta\right)+4 \iff 15=-4\left(\dfrac{5}{2}-\beta\right)+24 \iff$
$15=-10+4\beta+24 \iff 4\beta=1 \iff \beta=\dfrac{1}{4}$.
Dans ce cas : $M\left(3\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et $N\left(\dfrac{9}{4}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$ (cf. figure)

EXERCICE 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthononnal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), C(−1 ; −3 ; 2), D(4 ; −2 ; 5) et le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

1. **a.** On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-1\,;\,-1\,;\,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-2\,;\,-5\,;\,-1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

   b. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -2+1+1 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -4+5-1 = 0$.
   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est orthogonal à ce plan.

   c. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{ABC}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M}\cdot\vec{n} = 0$
   $\iff 2(x-1)-1(y-2)+1(z-3) = 0 \iff 2x-y+z-3 = 0.$

   Pour $t = -1$, on trouve effectivement les coordonnées de D.
   D'autre part un vecteur directeur de cette droite est le le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,-1)$, donc $\vec{u} = -\vec{n}$. La droite Δ est donc bien perpendiculaire au plan (ABC).
   Le point E appartient donc à la droite (Δ) et au plan (ABC). Ces coordonnées vérifient donc :

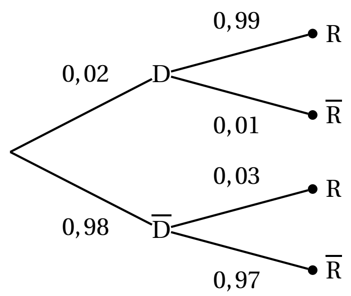
$$2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3 = 0 \iff 6 = 6t \iff t = 1.$$

   Les coordonnées de E sont donc (0 ; 0 ; 3).
   On a $\overrightarrow{\mathrm{EA}}\,(1\,;\,2\,;\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}\,(0\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{EC}}\,(-1\,;\,-3\,;\,-1)$.
   On a bien $\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \vec{0}$ qui signifie que E est l'isobarycentre des trois points A, B et C, soit le centre de gravité du triangle (ABC).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1.
   $y = 2$ est une solution évidente de l'équation.
   Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions $y = K\mathrm{e}^{-x}, K \in \mathbb{R}$.
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions : $x \longmapsto 2+Ke^{-x}, K \in \mathbb{R}$.
   La solution telle que $f\ln 2) = 1 \iff 2+K\mathrm{e}^{-\ln 2} = 1 \iff \dfrac{K}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = -1 \iff \dfrac{K}{2} = -1 \iff K = -2$.
   On a donc $f(x) = 2-2\mathrm{e}^{-x}, f(0) = 0, f'(0) = -f(0)+2 = 2$.
   L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $Y-0 = 2(X-0) \iff Y = 2X$. Conclusion : l'affirmation est vraie.
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A\,;\,+\infty[$ où A est un réel strictement positif.
   Proposition 2 : Faux : contre exemple : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}, g(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 1$.
3. **Proposition 3** : À la 70$^{\mathrm{e}}$ minute, la masse est égale à $0,9^{70}\times 10\,000 \approx 6,3$ (g). La proposition est fausse.
4. **Proposition 4** : On a $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.
   A et B sont indépendants, donc $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B}) = 0,4\times 0,4 = 0,16$.
   Donc $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,4+0,4-0,16 = 0,64$. La proposition est fausse.
5. **Proposition 5** :Avec des notations évidentes on a l'arbre suivant :



On a donc $p(\overline{\text{R}}) = 0,02 \times 0,01 + 0,98 \times 0,97 = 0{,}950\ 8$.
Proposition vraie

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **Proposition 1** : Vraie. On a $1 \times (2n+1) - 2 \times n = 1$: d'après Bezout n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. **Proposition 2** : Fausse. On a $x \equiv 3 \quad [5] \Rightarrow x^2 + x + 3 \equiv 15 \quad [5]$ soit $x^2 + x + 3 \equiv 0 \quad [5]$.
3. **Proposition 3** : Vraie. On a $N = 1\ 000a + 100b + 10a + 7 = 1\ 010 + 100b + 7$.
Donc $N \equiv 0 \quad [7] \iff 1\ 010a + 100b + 7 \equiv 0 \quad [7] \iff 1\ 010a + 100b \equiv 0 \quad [7] \iff 101a + 10b \equiv 0 \quad [7] \iff 101a + 101b \equiv 0 \quad 0[7]$, car $91b \equiv 0 \quad [7]$.
Finalement $101(a+b) \equiv 0 \quad [7]$.
Comme 101 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 7 divise $a+b$.
4. **Proposition 4** : Fausse. Par définition de la similitude, on a :
$z' - (1-\text{i}) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}[z - (1-\text{i})] \iff z' = 1 - \text{i} + 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\text{i}}{2}\right)[z - (1-\text{i})] \iff z' = 1 - \text{i} + \left(\sqrt{3} + \text{i}\right)[z - (1-\text{i})]$, soit enfin $z' = \left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z - \sqrt{3} + \text{i}\left(\sqrt{3} - 2\right)$
5. **Proposition 5** : Vraie. Soit un point M d'affixe z. Son symétrique autour de $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ a pour affixe $\overline{z}$ et le symétrique de ce point autour du point A a pour affixe z_1 tel que $\overline{z} + z_1 = 2a \iff z_1 = 2a - \overline{z}$.
Le symétrique de M autour de A a pour affixe le point d'affixe z_2 tel que $z + z_2 = 2a$ soit $z_2 = 2a - z$ et le symétrique de ce point autour de $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ a pour affixe z_3 tel que $z_3 = \overline{2a - z} = 2\overline{a} - \overline{z}$.
On a donc $z_1 = z_3 \iff 2a - \overline{z} = 2\overline{a} - \overline{z} \iff 2a = 2\overline{a} \iff a = \overline{a} \iff a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A
Restitution organisée de connaissances.

Partie B

1. f est la somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$: elle est donc dérivable et
$f'(x) = 1 + \dfrac{-\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}} = 1 - \dfrac{1}{1+\text{e}^{x}} = \dfrac{1 + \text{e}^{x} - 1}{1+\text{e}^{x}} = \dfrac{\text{e}^{x}}{1+\text{e}^{x}}$.
Cette dérivée est clairement supérieure à zéro sur $[0\,;\,+\infty[$, et la fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Comme $f(0) = 0 + \ln(1+1) = \ln 2 \approx 0,69 > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln 1 = 0$, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$, ce qui montre que la droite (D) est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

b. Comme $f(x) - x = \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) > \ln 1 = 0$, ceci montre que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D) quel que soit x.

3.

a. Voir la surface hachurée sur la figure ci-dessous.

b. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{1-1-t}{1+t} = -\dfrac{t}{1+t} < 0$.

La fonction g est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Or $g(t) \leqslant 0 \iff \ln(1+t) - t \leqslant 0 \iff \ln 1+t) \leqslant t$.

On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

c. On a donc $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$. En posant $t = \mathrm{e}^{-x}$, ce qui est possible puisque $t \geqslant 0$, on obtient l'encadrement :

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

d. En intégrant ces trois fonctions sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$[-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)]_0^1 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$$

$$-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right) + \ln 2 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$$\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$$\ln\left(\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

e. La calculatrice donne $0,379 \leqslant \mathrm{I}0,633$. Soit à 0,4 près :

$$0,3 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0,7.$$

4. On a $M(x\,;\,x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))$ et $N(x\,;\,x)$.

Comme on a vu que M est au dessus de N, on a $MN = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

Il faut donc résoudre l'inéquation : $\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \leqslant 0,025$ (car l'unité en ordonnées est égale à 2 cm) soit comme la fonction exponentielle est croissante :

$$\mathrm{e}^{\ln(1+\mathrm{e}^{-x})} \leqslant \mathrm{e}^{0,05} \iff$$

$$1+\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0,025} \iff$$

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0,025} - 1 \iff$$

$$-x \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{0,025} - 1\right) \iff$$

$$x \geqslant -\ln\left(\mathrm{e}^{0,025} - 1\right) \approx 3,676\ 35$$

L'ensemble des valeurs solutions est donc l'intervalle $\left]-\ln\left(\mathrm{e}^{0,025} - 1\right)\,;\,+\infty\right[$.

ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 4