Correction du baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $x \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^1$ ou encore $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \Rightarrow \mathrm{e}^x > 1$ (par croissance de la fonction exponentielle). f est donc bien définie pour $x \geqslant 1$.

   H est bien définie pour $x \geqslant 1$ comme intégrale d'une fonction continue car quotient de deux fonctions continues sur $[1~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas comme on l'a vu précedemment.

   b. On sait que $H'(x) = f(x)$: H est la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

   c. Sur $[1~;~+\infty[$, $x > 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ (voir **a.**), donc la fonction f est positive sur l'intervalle $[1~;~x]$.

   $H(x)$ est donc égale à la mesure (en unités d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites verticales d'équation $X = 1$ et $X = x$.

   $H(3)$ est donc égale à la mesure (en unités d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

2. **a.** Si $x > 0$, l'image $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{x \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

   b. En posant :
   $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \end{array}\right.$, on peut, toutes les fonctions étant continues sur $[1~;~3]$, intégrer par parties :

   $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_1^3 - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x =$

   $\displaystyle 3\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right) - \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x.$

   c. On a $1 \leqslant x \leqslant 3 \iff -3 \leqslant -x \leqslant -1 \iff \mathrm{e}^{-3} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1} \iff$ $-\mathrm{e}^{-1} \leqslant -\mathrm{e}^{-x} \leqslant -\mathrm{e}^{-3} \iff 1 - \mathrm{e}^{-1} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-3}$.

   Par croissance de la fonction ln, on a donc :

   $$\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right).$$

   d. En intégrant les trois fonctions de l'inégalité précédente sur $[1~;~3]$, on obtient :

   $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right)\,\mathrm{d}x$ soit :

   $\displaystyle 2\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \leqslant \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right).$

   On a donc $\displaystyle -2\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right) \leqslant -\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant -2\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$. Donc finalement en utilisant le résultat de la question **b.** :

   $\displaystyle \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right) - \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right) - 3\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right).$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

Partie B

1. **a.** • $|z_A|^2 = 3+1 = 4 = 2^2$, donc $|z_A| = 2$.

On a donc $z_A = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{-5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\left(\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{-5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

Le module est égal à 2 et un argument à $\frac{-5\pi}{6}$.

• De même, $|z_B| = 2$ et $z_\mathrm{B} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

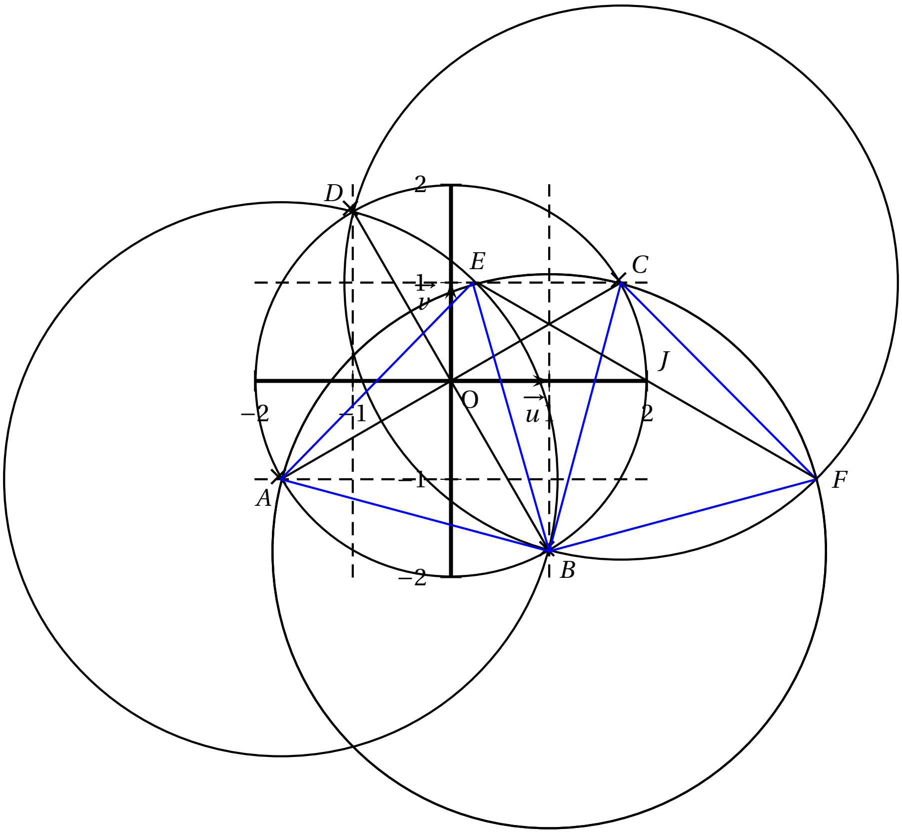
Le module est égal à 2 et un argument à $-\frac{\pi}{3}$.

• $z_\mathrm{C} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$.

Le module est égal à 2 et un argument à $\frac{\pi}{6}$.

• $z_\mathrm{D} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}$. Le module est égal à 2 et un argument à $\frac{2\pi}{3}$.

b. En utilisant le cercle centré en O de rayon 2 et en traçant des médiatrices :



c. A et C d'une part, B et D d'autre part ont leurs coordonnées opposées : ils sont donc symétriques autour de O, donc $ABCD$ est un parallélogramme ;

Les arguments de B, C et D sont respectivement $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$, donc les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires, de même que (OC) et (OD).

Le parallélogramme $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires : c'est un losange :

Comme $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Conclusion : $ABCD$ est un carré.

2. **a.** Dans la rotation r le point B, un point et son image sont les trois sommets d'un triangle équilatéral (triangle isocèle ayant un angle au sommet

de $\frac{\pi}{3}$).
Pour construire F il suffit de construire le cercle de centre B et de rayon BC et le cercle de centre C et de rayon CB.
De même pour E, on trace le cercle de centre B et de rayon BA et le cercle de centre A et de rayon AB.

b. On a $z' - \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right) = \text{e}^{-\frac{\text{i}\sqrt{3}}{2}}\left[z - \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)\right] \iff$
$z' = 1 - \text{i}\sqrt{3} + \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[z - \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)\right] \iff$
$z' = 1 - \text{i}\sqrt{3} + \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}.$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2.$$

c. En remplaçant z par $-\sqrt{3} - \text{i}$, on obtient :
$z_E = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - \text{i}\right) + 2 = 2 - \sqrt{3} + \text{i}.$

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Partie B

1. **a.** Voir la partie obligatoire.

b. Voir la partie obligatoire.

c. Comme vu plus haut O est le milieu de $[AC]$ et le milieu de $[BD]$.
$\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - \text{i}} = \dfrac{\left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)}{\left(-\sqrt{3} - \text{i}\right)\left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)} = \dfrac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} + \text{i} + 3\text{i}}{3 + 1} = \text{i}.$
Donc les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (ses diagonales ont le même milieu O), un rectangle (ses diagonales sont deux diamètres) et un losange (ses diagonales sont perpendiculaires) : c'est un carré.

2. **a.** Cherchons les points invariants en résolvant l'équation $z' = z \iff$
$z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}z + 2 \iff z\left(1 - \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = 2 \iff z\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\text{i}\sqrt{3}}{2}\right) \iff$
$z\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\text{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \iff z = \dfrac{2}{\frac{1}{2} + \frac{\text{i}\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{1 + \text{i}\sqrt{3}} = 1 - \text{i}\sqrt{3} = z_B.$
Le seul point invariant est le point B.
De $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$ et
$1 - \text{i}\sqrt{3} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right) + 2$, on obtient par différence :

$$z' - \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\left[z - \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)\right]$$

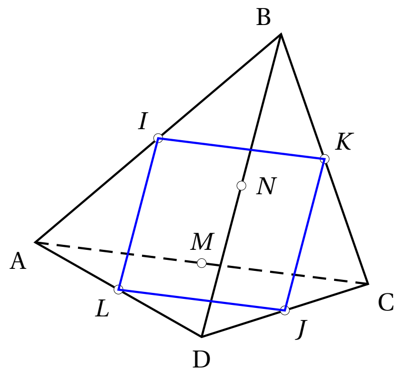
g est donc la similitude directe de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. C'est la rotation de centre B.

b. Voir la partie obligatoire.
Pour le point J image de O c'est le point d'affixe 2

c. O est le milieu de $[AC]$, donc la rotation conservant les milieux J est le milieu de $[EF]$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats



1. $G = \text{bar}\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1),\ (D, 1)\} = \text{bar}\{I, 2),\ (J, 2)\}$. Donc G est le milieu de $[IJ]$.
   Toujours en utilisant l'associativité du barycentre et en associant A et C d'une part B et D d'autre part on trouve que G est le milieu de $[MN]$.
   Enfin en associant B et C d'une part A et D d'autre part on trouve que G est l'isobarycentre de $[KL]$.
   Les segments $[KL], [MN]$ et $[IJ]$ ont le même milieu.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD,\ BC = AD$ et $AC = BD$.
   (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** En utilisant le théorème de la droite des milieux dans les triangles ABC et ACD, on a $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On en déduit que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ} \iff IKJL$ est un parallélogramme.
   En utlisant le même théorème dans les triangles ABD et BCD, on trouve que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{JK}$.
   On a donc en prenant les normes $IK = \dfrac{1}{2}AC$ et $LI = \dfrac{1}{2}BD$. Or $AC = BD$. Conclusion : $LI = IK$.
   Le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un losange. On démontre de la même façon que $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.

   b. $IKJL,\ IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges donc (IJ) et (KL) sont orthogonales de même que (IJ) et (MN) ainsi que (KL) et (MN).

3. **a.** La droite (IJ) est orthogonale à deux droites (KL) et (MN) du plan du losange $KNLM$: elle est donc orthogonale à ce plan (MKN).

   b. (IJ) orthogonale au plan (MKN) est orthogonale à toute droite de ce plan donc en particulier à la droite (MK). Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont donc orthogonaux et par conséquent $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.
   Or dans le triangle ABC la droite (MK) (droite des milieux) est parallèle à (AB). Conclusion (IJ) est perpendiculaire à la droite (AB).
   De même (IJ) est orthogonale à (NK) qui est parallèle à (CD), donc (IJ) est perpendiculaire à (CD).

   c. On a vu que $G \in (IJ)$ et (IJ) est perpendiculaire à $[AB]$, donc G appartient à la médiatrice de $[AB]$. Conclusion G est équidistant de A et de B, donc appartient au plan médiateur de $[AB]$. On démontre de même que G appartient au plan médiateur de $[CD]$.

   d. On sait déjà que $GA = GB$ et que $GC = GD$.
   On démontre de la même façon qu'à la question précédente que G appartient au plan médiateur de $[AD]$, donc que $GA = GD$.

Finalement on a $GA = GB = GC = GD$ ce qui montre que G est le centre de la sphère contenant les quatre points A, B, C et D.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

1. **a.** On a $f(x) = 2x - \dfrac{x^2}{10}$, donc $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{5}$. On a $f'(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 10$ et $f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 10$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,10]$ et décroissante sur $[10\,;\,20]$.

   b. Sur $[0\,;\,20]$, le maximum de f est donc $f(10) = 10$, $f(0) = 0$ et $f(20) = 0$ sont les minimums de f.

   On a donc quel que soit $x \in [0\,;\,20]$, $f(x) \in [0\,;\,10]$.

   c. Voir ci-dessous.

2. Initialisation : On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0,1 = 1,9$

   On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.

   Hérédité : Supposons qu'il existe une valeur n pour laquelle $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

   On a vu que sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, le fonction f est croissante, donc $\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

   De plus d'après la question **1. b.** quel que soit un nombre dans l'intervalle $[0\,;\,20]$ et *a fortiori* dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, son image par f et elle aussi dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. On a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$. La démonstration par récurrence est terminée.

3. On vient en fait de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Comme elle majorée par 10, elle converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 10.

   Comme la fonction f est continue on obtient par passage à la limite :

$$\ell = 2\ell - \frac{\ell^2}{10} \iff 10\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(10-\ell) = 0 \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 10.$$

   $\ell = 0$ n'est pas possible car $u_0 = \ell$ et la suite est croissante.

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Partie B : un modèle continu

1. **a.** $z = \dfrac{1}{y} \iff y\dfrac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\dfrac{z'}{z^2}$. On a donc :

   $y' = \dfrac{1}{20}y(10-y) \iff -\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{z}\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) \iff z' = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{20}$.

   b. Une solution constante évidente de E_1 est $z = \dfrac{1}{10}$.

   Les solutions de l'équation différentielle $z' = -\dfrac{1}{2}z$ sont les fonctions $x \longmapsto K\text{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   Les solutions de l'équation E_1 sont donc les fonctions

   $x \longmapsto z(x) = K\text{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}$.

   Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$x \longmapsto \frac{1}{K\text{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}}.$$

2. g est une solution de (E) telle que $g(0)=1 \iff \dfrac{1}{K\mathrm{e}^{-\frac{0}{2}}+\dfrac{1}{10}}=1 \iff \dfrac{1}{K+0,1}=1 \iff 1=K+0,1 \iff K=0,9=\dfrac{9}{10}$.

Finalement $g(x)=\dfrac{1}{\frac{9}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{10}}=\dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1}$.

3. On a $g'(x)=-\dfrac{10\times 9\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1\right)^2}=\dfrac{45\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1\right)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=10$.

Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

5. Il faut résoudre l'inéquation $g(x)>5 \iff \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1}>5 \iff 2>9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1 \iff 1>9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \iff \dfrac{1}{9}>\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \iff -\ln 9>-\frac{x}{2} \iff \frac{x}{2}>\ln 9 \iff x>2\ln 9$ soit environ 4,3 ans ou en 5 ans à 1 an près soit en 2010.

ANNEXE

À rendre avec la copie