Baccalauréat S Amérique du Nord 4 juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

1. Comme y est dérivable sur $[0~;~30]$, z aussi et $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$; on va remplacer :

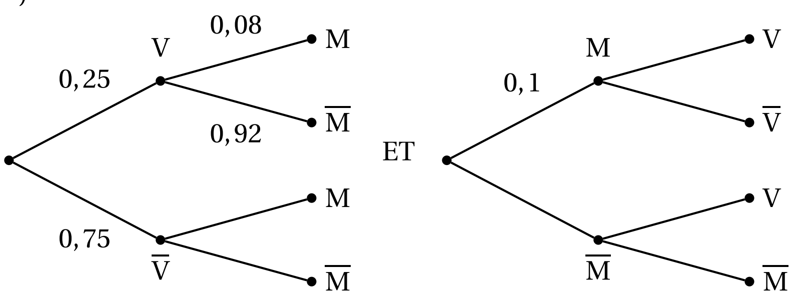
$$\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0,01 \\ y' & = & 0,05y(10-y) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ -\dfrac{z'}{z^2} & = & 0,05\dfrac{1}{z}(10-\dfrac{1}{z}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0,5z+0,05 \end{array}\right.$$

2. **a.** z est donc solution d'une équation différentielle de la forme $z' = az+b$. Les solutions sont les fonctions définies sur $[0~;~30]$ par $z(x) = k\mathrm{e}^{-0,5x}+0,1$ avec k réel.
$z(0) = 100 \iff k\mathrm{e}^{-0,5\times 0}+0,1 = 100 \iff k = 99,9$
Ainsi, z est définie par $z(x) = 99,9\mathrm{e}^{-0,5x}+0,1$
Enfin, y est définie par $y(x) = \dfrac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5x}+0,1}$.

   b. On veut $y(30)$.
$y(30) = \dfrac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5\times 30}+0,1} \approx 9,99$. Après 30 jours, 10 % de la population est infectée.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

1. Notons M l'évènement « l'individu tombe malade »et V « l'individu est vacciné ».
On a $p(\mathrm{V}) = 0,25$; $p_{\mathrm{V}}\left(\overline{\mathrm{M}}\right) = 0,92$ et $p(\mathrm{M}) = 0,1$



On veut $p(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{V}})$.
$p(\mathrm{M}\cap\mathrm{V}) = p(\mathrm{V})p_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = 0,25\times 0,08 = 0,02$.
$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{V}) = \dfrac{p(\mathrm{M}\cap\mathrm{V})}{p(M)} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$
$p_{\mathrm{M}}\left(\overline{\mathrm{V}}\right) = 1 - p_{\mathrm{M}}(\mathrm{V}) = 0,8$
Enfin, $p\left(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{V}}\right) = p(\mathrm{M})\times p_{\mathrm{M}}\left(\overline{\mathrm{V}}\right) = 0,1\times 0,8 = 0,08$

2. On cherche ici $p_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$: $p_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p\left(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{V}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{V}}\right)} = \dfrac{0,08}{0,75} = \dfrac{8}{75}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Voir le cours pour les détails, voici la démarche :

Par linéarité de l'intégrale (second rappel) : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \iff \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Or, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, donc $f-g \leqslant 0$ et le premier rappel assure le résultat.

Partie B

1. **a.** f est la composée de la fonction $x \longmapsto -x^2$, décroissante sur $[0\,;\,1]$, suivie de la fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$. f est donc décroissante sur $[0\,;\,1]$.

On peut bien sur argumenter sur la dérivabilité de f puis le signe de sa dérivée.

On en déduit que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0) \iff \dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$

b. Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \iff \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$

2. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

On pose $u(x) = -x^2$, ainsi $u'(x) = -2x$ et $(u'\mathrm{e}^u)(x) = -2xf(x) \iff xf(x) = -\dfrac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

On a donc : $u_1 = \left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

3. **a.** Comme la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $x^n f(x) \geqslant 0$. Enfin, comme les bornes sont dans le bon ordre, par positivité de l'intégrale, on a bien le résultat.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}f(x) - x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-1)x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ car la fonction intégrée est clairement négative sur $[0\,;\,1]$.

La suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

4. **a.** D'après la question 1. a., pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant 1$, par croissance de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \iff \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \iff \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$

b. D'après les questions 3. a. et 4. a., on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Avec le théorème des gendarmes la suite converge vers 0.

EXERCICE 3 **5 points**

1. $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, donc $I\left(0\,;\,\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$, donc $\mathrm{J}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$

Enfin, K est le milieu de [IJ], donc $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$

2. On a G(1 ; 1 ; 1), donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires, donc les points A, K et G ne sont pas alignés.

3. **a.** Montrons que les trois points A, K et G sont équidistants de I et J.

AI = AJ = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (cube de côté 1).

KI = KJ car K est le milieu de $[IJ]$.

Le théorème de Pythagore appliqués aux triangles GHI rectangle en H et GCJ rectangle en C, permet de montrer que GI = GJ.

Les trois points A, K et G sont équidistants de I et J, donc (AKG) est bien le plan médiateur de [IJ].

b. Le vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ est donc normal à (AKG), une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme : $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z+d=0 \iff x-z+2d=0$.

Comme A ∈ (AKG), les coordonnées de A vérifient cette équation, donc $d=0$.

Une équation de (AKG) est donc $x-z=0$.

c. Les coordonnées de D(0 ; 1 ; 0) vérifient l'équation précédente, donc D ∈ (AKG).

4. **a.** L $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, on en déduit les coordonnées du milieu de [AL] ; on trouve les coordonnées de K !

b. Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

On vient de montrer que K est le milieu de [AL], donc K = bar$\{(\text{A},\ 2), (\text{L},\ 2)\}$

Mais, L est aussi le milieu de [DG], donc L = bar$\{(\text{D},\ 1), (\text{G},\ 1)\}$

Par associativité du barycentre, on a donc K= bar$\{(\text{A},\ 2), (\text{D},\ 1), (\text{G},\ 1)\}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $a=1+\text{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\text{i}$.

Partie A : étude d'un cas particulier

1. **a.** $\dfrac{-a}{b-a}=\dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\text{i}}=\dfrac{\left(-1-\text{i}\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}-\text{i}\right)}{4}=\text{i}$

b. On en déduit que $0-a=\text{i}(b-a)$, donc, que le point O est l'image de B(b) dans la rotation de centre A(a) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le triangle OAB est bien rectangle, isocèle en A.

2. On utilise l'écriture complexe de la rotation $r\ :\ z'-0=\text{e}^{\frac{2\pi}{3}}(z-0)$.

$$c=\text{e}^{\frac{2\pi}{3}}a=\text{e}^{\frac{2\pi}{3}}(1+\text{i}\sqrt{3})=\left(-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\text{i}\sqrt{3})=\frac{1}{2}\left(-1-(\sqrt{3})^2\right)=-2$$

3. **a.** On peut se contenter de vérifier que les coordonnées de A et de C vérifient cette équation :

A$(1\ ;\ \sqrt{3})$ et C$(0\ ;\ -2)$.

Pour A : $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1+2)=\sqrt{3}$. OK

Pour C : $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(-2+2)=0$. OK

A et C appartiennent à la droite d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$, c'est donc bien la droite (AC).

b. L'affixe du milieu E de [BD] est $z_{\text{E}} = \dfrac{b+d}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\text{i}-2-2\text{i}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\text{i}$

Or, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_{\text{E}}+2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+2\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = y_{\text{E}}$. E est bien sur (AC).

Partie B : étude du cas général

1. $a' = a\text{e}^{\text{i}\theta}$ et $b' = b\text{e}^{\text{i}\theta}$.

2. **a.** $p = \dfrac{a+a'}{2} = \dfrac{1}{2}a\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)$

$q = \dfrac{b+b'}{2} = \dfrac{1}{2}b\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)$

b. $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}a\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)}{\dfrac{1}{2}b\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)-\dfrac{1}{2}a\left(1+\text{e}^{\text{i}\theta}\right)} = \dfrac{-a}{b-a}$ en simplifiant par $\dfrac{1}{2}(1+\text{e}^{\text{i}\theta})$

c. Or, d'après la question A 1. a., $\dfrac{-a}{b-a} = \text{i}$, donc $\dfrac{-p}{q-p} = \text{i}$. Donc, $\left(\overrightarrow{\text{PQ}}\,;\overrightarrow{\text{PO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Les droites (OP) et (PQ) sont bien orthogonales.

d. A′ est l'image de A dans une rotation de centre O, donc OA′ = OA et O est sur la médiatrice de (AA′).

Comme P est le milieu de [AA′], cette médiatrice est donc (OP).

Les deux droites (PQ) et (AA′) sont donc orthogonales à (OP) et passent par P, elles sont donc confondues et Q appartient bien à (AA′).

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1. On considère l'équation

$$(E) : \quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. $(-2;1)$ est une solution de (E) car $-2\times 23 + 1\times 47 = 1$.

b. $(x\,;\,y)$ solution de $(E) \Rightarrow 23x+47y = 1$

$\left\{\begin{array}{lcl} 23x+47y & = & 1 \\ -2\times 23+1\times 47 & = & 1\end{array}\right. \overset{\text{par soustraction}}{\Rightarrow} 23(x+2)+47(y-1) = 0 \Rightarrow 23(x+2) = 47(1-y)$

Donc 23 divise $47(1-y)$, mais 47 et 23 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 23 divise $1-y$.

Donc il existe un entier relatif k tel que $1-y = 23k$ soit $y = 1-23k$

On a donc aussi, $23(x+2) = 47\times 23k \Longleftrightarrow x = 47k-2$

On vérifie que, réciproquement, pour tout entier relatif k, $(47k-2;1-23k)$ est bien solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(47k-2;1-23k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

c. $23x \equiv 1 \quad (47) \Leftrightarrow$ il existe $y\in\mathbb{Z}$, $23x = 1-47y \Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{Z}$, $x = 47k-2$ et $y = 1-23k$

De plus $x\in A \Leftrightarrow 1 \leqslant 47k-2 \leq 46 \Leftrightarrow 3 \leqslant 47k \leqslant 48$.

Or un seul multiple de 47 se trouve dans cet encadrement, c'est 47. Donc $k = 1$ et $x = 45$.

Le seul entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$ est 45.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. $ab \equiv 0 \quad (47) \Leftrightarrow 47$ divise ab.

Or 47 est un nombre premier, il apparait donc au moins dans l'une des deux décompositions de a ou de b. D'où le résultat.

b. $a^2 \equiv 1 \quad (47) \Leftrightarrow a^2 - 1 \equiv 0 \quad (47) \Leftrightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0 \quad (47) \overset{2a}{\Rightarrow} a - 1 \equiv 0 \quad (47)$ ou $a + 1 \equiv 0 \quad (47) \cdots$

3. **a.** Tout entier p de A est premier avec 47, donc le théorème de Bezout assure l'existence de $(q,\ s)$ entiers relatifs tels que $qp + 47s = 1$.

On a alors $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

b. $p = inv(p) \Rightarrow p^2 \equiv 1 \quad (47) \overset{2b}{\Rightarrow} p \equiv -1 \quad (47)$ ou $p \equiv 1 \quad (47) \overset{p \in A}{\Rightarrow} p = 46$ ou $p = 1$

Réciproquement 1 et 46 conviennent bien.

c. Pour tout entier p de A compris entre 2 et 45, il existe (d'après 3a) un entier de A **distinct** (d'après 3b) $inv(p)$ tel que $p\times\ inv(p) \equiv 1 \quad (47)$, donc $45! \equiv 1 \quad (47)$. On en déduit $46! \equiv 46 \quad (47)$ soit enfin $46! \equiv -1 \quad (47)$.