

**BACCALAUREAT GENERAL**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement de Spécialité**

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 9*

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (5 points )

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle  $J$  le point d'affixe  $i$ .

1. On considère les points  $A, B, C, H$  d'affixes respectives  $a = -3 - i, b = -2 + 4i, c = 3 - i$  et  $h = -2$ .  
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que  $J$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ . Préciser le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe  $\frac{b - c}{h - a}$ .  
En déduire que les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle  $ABC$ .

4. On note  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Déterminer l'affixe  $g$  du point  $G$ .  
Placer  $G$  sur la figure.
5. Montrer que le centre de gravité  $G$ , le centre du cercle circonscrit  $J$  et l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  sont alignés. Le vérifier sur la figure.
6. On note  $A'$  le milieu de  $[BC]$  et  $K$  celui de  $[AH]$ . Le point  $A'$  a pour affixe  $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ .
  - a. Déterminer l'affixe du point  $K$ .
  - b. Démontrer que le quadrilatère  $KHA'J$  est un parallélogramme.

## EXERCICE 2 (6 points )

(Commun à tous les candidats)

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^x - 1.$$

- a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et étudier le sens de variation de  $f$ .
- b. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- c. Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

2. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction exponentielle et  $\Gamma$  celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  sont données en annexe.

Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. On note  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$ .

On rappelle que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^x > \ln(x)$ .

- a. Montrer que la longueur  $MN$  est minimale lorsque  $x = \alpha$ . Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à  $10^{-2}$  près.
  - b. En utilisant la question 1., montrer que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ . En déduire que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\alpha$  et la tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse  $\alpha$  sont parallèles.
3. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x \ln(x) - x$ . Montrer que la fonction  $h$  est une primitive de la fonction logarithme népérien sur  $]0, +\infty[$ .
- b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

### EXERCICE 3 (4 points )

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue  $n$  tirs supposés indépendants. On désigne par  $p_n$  la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces  $n$  tirs.

La valeur minimale de  $n$  pour que  $p_n$  soit supérieure ou égale à 0,9 est :

- a. 6      b. 7      c. 10      d. 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire  $X$  définie sur  $[0, +\infty[$  et suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0002$ . Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant  $t$  est  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

- a. 0,271      b. 0,135      c. 0,865      d. 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1. Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

- a.  $\frac{125}{3\,888}$       b.  $\frac{625}{648}$       c.  $\frac{25}{7\,776}$       d.  $\frac{3}{5}$

4. Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants d'un même univers  $\Omega$  tels que  $p(A) = 0,3$  et  $p(A \cup B) = 0,65$ . La probabilité de l'événement  $B$  est :

- a. 0,5      b. 0,35      c. 0,46      d. 0,7

## EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

1. On considère l'équation  $(E) : 11x - 7y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  tels que  $11u - 7v = 1$ . Trouver un tel couple.
  - b. En déduire une solution particulière de l'équation  $(E)$ .
  - c. Résoudre l'équation  $(E)$ .
  - d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la droite  $D$  d'équation cartésienne  $11x - 7y - 5 = 0$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que  $0 \leq x \leq 50$  et  $0 \leq y \leq 50$ . Déterminer le nombre de points de la droite  $D$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{C}$  et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
  
2. On considère l'équation  $(F) : 11x^2 - 7y^2 = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Démontrer que si le couple  $(x; y)$  est solution de  $(F)$ , alors  $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ .
  - b. Soient  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, $x$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $x^2$ est congru à					

Modulo 5, $y$ est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de  $x^2$  et de  $2y^2$  par 5 ?

- c. En déduire que si le couple  $(x; y)$  est solution de  $(F)$ , alors  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5, alors le couple  $(x; y)$  n'est pas solution de  $(F)$ .  
Que peut-on en déduire pour l'équation  $(F)$  ?

# FEUILLE ANNEXE

## Annexe 1, exercice 2

