❊ Banque filière PT ❊

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Exercice 1

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°) Former les polynômes caractéristiques de f et de g.
En déduire les valeurs propres de f et de g.

2°) Déterminer, par leurs équations, les sous-espaces propres de f et de g.

3°) Construire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de f et vecteurs propres de g ; la première composante non nulle de chacun de ces vecteurs sera obligatoirement prise égale à 1.

4°) Donner les matrices de passage directe et inverse de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, ainsi que les matrices A' et B' qui représentent respectivement f et g dans $\mathscr{B}'$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$a_0 = a_1 = 1,\ \text{et}$$

$$(1)\quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

1°) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq a_n \leq n^2$.
En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2°) Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ la somme de cette série.
Montrer que, dans son intervalle ouvert de convergence, S est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on établira (on pourra, par exemple, multiplier les deux membres de (1) par x^n et sommer pour n variant de 1 à l'infini). On notera (E) cette équation.

3°) En intégrant (E), expliciter la fonction S à l'aide de fonctions usuelles.

4°) Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par p une constante réelle strictement positive donnée et par $\mathcal{P}$ la courbe de représentation paramétrique :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \text{ défini par } \overrightarrow{OM}(t) = \frac{t^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j}.$$

1°) Reconnaître et représenter graphiquement $\mathcal{P}$.

2°) Former une équation cartésienne de la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$.

3°) Discuter, suivant les valeurs du nombre réel θ, l'existence et le nombre de points $M(t)$ de $\mathcal{P}$ différents de $M(\theta)$ tels que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.

4°) Montrer que les droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$, passent par un point fixe à déterminer.

Exercice 4

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On désigne par a une constante réelle strictement positive donnée, et par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ respectivement la courbe et la surface de représentations paramétriques :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \text{ où } \overrightarrow{OM}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + at\vec{k} \text{ pour } \mathcal{C},$$

$$(t,u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M(t,u) \text{ où}$$

$$\overrightarrow{OM}(t,u) = (a\cos(t) - u\sin(t))\vec{i} + (a\sin(t) + u\cos(t))\vec{j} + (at + u)\vec{k} \text{ pour } \mathcal{S}.$$

1°) Préciser les points réguliers de $\mathcal{S}$.
Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point régulier.

2°) $\mathcal{S}$ est-elle une surface réglée ?
$\mathcal{S}$ est-elle une surface développable ?

3°) $\mathcal{S}$ est-elle engendrée par les tangentes à $\mathcal{C}$?

4°) Pour $u \neq 0$, comparer le plan osculateur à $\mathcal{C}$ au point de paramètre t et le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point de paramètres (t,u).