❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Les candidats sont priés de rédiger chaque exercice sur une copie séparée.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.

Exercice 1

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes d'une variable, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

On considère $n+1$ nombres réels quelconques donnés h_0, h_1, ..., h_n.

On note M_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne vaut h_j^{n-i}, pour i et j variant de 0 à n. On a donc :

$$M_n = \begin{pmatrix} h_0^n & h_1^n & \dots & h_n^n \\ h_0^{n-1} & h_1^{n-1} & \dots & h_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admettra, sans chercher à le démontrer, que le déterminant D_n de la matrice M_n vaut $\prod\limits_{0\leq i<j\leq n} (h_i - h_j)$.

1. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts donnés h_0, h_1, ..., h_n.

   Montrer que la famille $\left((x+h_k)^n\right)_{k=0,1,\dots,n}$ est libre dans E_n.

   La famille $\left((x+h)^n\right)_{h\in R}$ est-elle une famille génératrice de E_n ?

2. Pour toute fonction polynôme P de E_n et pour tout réel h, on note P_h la fonction polynôme de E_n définie par la relation :

$$P_h(x) = P(x+h), \forall x \in R.$$

On désigne par $\mathcal{L}(E_n)$ l'algèbre des endomorphismes de E_n et par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des éléments ϕ de $\mathcal{L}(E_n)$ tels que, pour tout P de E_n, pour tout h de R et pour tout x de R, on a :

$$\phi(P_h)\ (x) = \phi(P)\ (x+h).$$

Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_n)$ stable pour la composition des applications.

3. Pour tout P de E_n, on note $P^{(0)} = P$ et, pour k entier strictement positif, on désigne par $P^{(k)}$ la fonction polynôme dérivée k-ième de P. Pour tout entier k positif ou nul, on note par ϕ_k l'élément de $\mathcal{L}(E_n)$ défini par $\phi_k(P) = P^{(k)}$.

L'endomorphisme ϕ_k appartient-il à $\mathcal{E}_n$?

L'endomorphisme ϕ_k commute-t-il avec tout élément de $\mathcal{E}_n$?

La famille $(\phi_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ est-elle une base de $\mathcal{E}_n$?

Exercice 2

A la suite de nombres réels $(u_k)_{k\in N}$ on associe les suites $(P_n)_{n\in N}$ et $(Q_n)_{n\in N}$ définies par

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1-u_k) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k).$$

1. On suppose que u_k est positif ou nul pour tout k et que la série de terme général u_k converge.

1.1 Etudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in N}$: on pourra utiliser la fonction logarithme népérien. Montrer que, si la suite $(P_n)_{n\in N}$ admet une limite nulle, l'un au moins des termes de la suite $(u_k)_{k\in N}$ est égal à 1.

1.2 Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in N}$.

2. On suppose toujours les u_k tous positifs ou nuls, mais on suppose que la série de terme général u_k est divergente.

2.1 Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in N}$.

2.2 Lorsque de plus tous les u_k sont strictement inférieurs à 1, calculer la limite de la suite $(P_n)_{n\in N}$.

3. On suppose désormais que les u_k sont de signe quelconque mais que la série de terme général $|u_k|$ est convergente.

Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in N}$.

Montrer que, si la suite $(Q_n)_{n\in N}$ admet une limite nulle, l'un au moins des u_k est égal à -1.

4. Dans le cas particulier où u_0 est égal à 1 et où u_k est égal à $\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 1, étudier la convergence de la suite associée $(Q_n)_{n\in N}$.

Exercice 3

Le plan euclidien R^2 est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\,)$ et a désigne une constante réelle strictement positive donnée.

Soit C_1 la courbe de représentation paramétrique :

$$\phi \mapsto \overrightarrow{OM}(\phi) = a\,\left(\cos(\phi) + \ln\left(\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)\overrightarrow{\imath} + a\,\sin(\phi)\,\overrightarrow{\jmath}\,,\ \phi \in\,]0,\pi[.$$

Soit C_2 la courbe d'équation cartésienne $y = a\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $x \in\ [0,+\infty[$.

1. Représenter graphiquement la courbe C_1. On recherchera en particulier les asymptotes et les symétries éventuelles.

2. On note $T(M)$ l'intersection de la tangente en tout point M régulier de C_1 avec l'axe des abscisses. Calculer la distance de M à $T(M)$.

3. Etablir une représentation paramétrique de la développée de C_1 en utilisant ϕ comme paramètre.

Donner une équation cartésienne de cette développée.

4. On désigne par S le point de coordonnées $(0,a)$ et par P le point de la courbe C_2 d'abscisse x : calculer la longueur s de l'arc de C_2 d'origine S et d'extrémité P.

On note Q le point de la tangente en P à C_2 vérifiant les deux conditions $||\overrightarrow{PQ}\,|| = s$ et $\overrightarrow{PQ}\,.\,\overrightarrow{\jmath} \leq 0$. En utilisant l'abscisse x de P comme paramètre, donner une représentation paramétrique de la courbe décrite par Q lorsque P parcourt C_2.

Exercice 4

L'espace euclidien R^3 de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\,,\overrightarrow{k}\,)$. On note a une constante réelle strictement positive donnée.

On désigne par S_1 la surface de représentation paramétrique :

$$(r,\theta) \mapsto \overrightarrow{OM_1}(r,\theta) = r\cos(\theta)\,\overrightarrow{\imath} + r\sin(\theta)\,\overrightarrow{\jmath} + a\ \theta\,\overrightarrow{k}\,,\ r \geq 0,\ \theta \in R.$$

On désigne par S_2 la surface de révolution de représentation paramétrique :

$$(u,v) \mapsto \overrightarrow{OM_2}(u,v) = u\cos(v)\,\overrightarrow{\imath} + u\sin(v)\,\overrightarrow{\jmath} + z(u)\,\overrightarrow{k}\,,\ u \geq a,\ v \in [0,2\pi],$$

où l'on a noté $z(u) = a\ \ln\left(\dfrac{u+\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right)$.

1. Donner un exemple de déplacement qui ne soit pas une rotation et qui laisse la surface S_1 invariante.

La surface S_1 est-elle réglée ?

La surface S_1 est-elle développable ?

2. On suppose dans cette question 2 que r est une fonction de classe C^1 de θ que l'on notera aussi $r(\theta)$, où θ décrit un intervalle donné I_1 de la forme $[\alpha,\beta]$ avec $\alpha < \beta$. La fonction $\theta \mapsto \overrightarrow{OM_1}(r(\theta),\theta)$ définit donc une courbe C_1 tracée sur la surface S_1.

Exprimer la longueur s_1 de la courbe C_1 sous la forme d'une intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\theta)\,d\theta$, où $f(\theta)$ est une fonction de a, θ, $r = r(\theta)$ et $r' = r'(\theta)$ que l'on déterminera.

Dans le cas particulier, qui ne sera plus reconsidéré dans la suite de cet exercice, où r est défini par $r(\theta) = a\cos\theta$, avec $I_1 = [0, 2\pi]$, donner la valeur de s_1 et indiquer la nature géométrique de la projection orthogonale de C_1 sur le plan $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

3. On suppose dans cette question 3 et dans la question 4 suivante que u est une fonction de classe C^1 de v que l'on notera $u(v)$, où v décrit un intervalle donné $I_2 = [\gamma, \delta]$, avec $\gamma < \delta$. La fonction $v \mapsto \overrightarrow{OM_2}(u(v), v)$ définit donc une courbe C_2 tracée sur la surface S_2.

Exprimer la longueur s_2 de la courbe C_2 sous la forme d'une intégrale $\displaystyle\int_\gamma^\delta g(v)\,dv$, où $g(v)$ est une fonction de a, v, $u = u(v)$ et $u' = u'(v)$ que l'on déterminera.

4. On se place toujours dans le cas de la troisième question dont on conserve les notations et l'on effectue le changement de variables

$$A : (r, \theta) \in R^{*+} \times [0, 2\pi] \mapsto (u, v)$$

défini par $u = \sqrt{a^2 + r^2}$, $v = \theta$.

On suppose que A permet de définir une application $\mathcal{R}$ de S_2 dans S_1 et que l'image $\mathcal{R}(C_2)$ de la courbe C_2 par $\mathcal{R}$ est une courbe tracée sur C_1 qui peut être définie par une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ comme à la deuxième question.

Comparer les longueurs des courbes C_2 et $\mathcal{R}(C_2)$.