

**BANQUE FILIERE PT**

# **Epreuve de Physique I-A**

**durée 4h**

*Calculatrice autorisée*

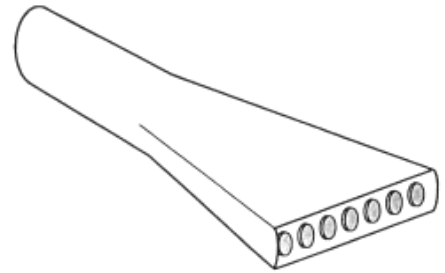
## **ETUDE D'UNE SOURCE A ULTRASONS UTILISEE DANS LE DOMAINE DE L'IMAGERIE MEDICALE**

*Les candidats sont fortement invités à lire complètement le sujet avant de commencer. Toutes les parties sont indépendantes, de même que de nombreuses questions.*

### INTRODUCTION

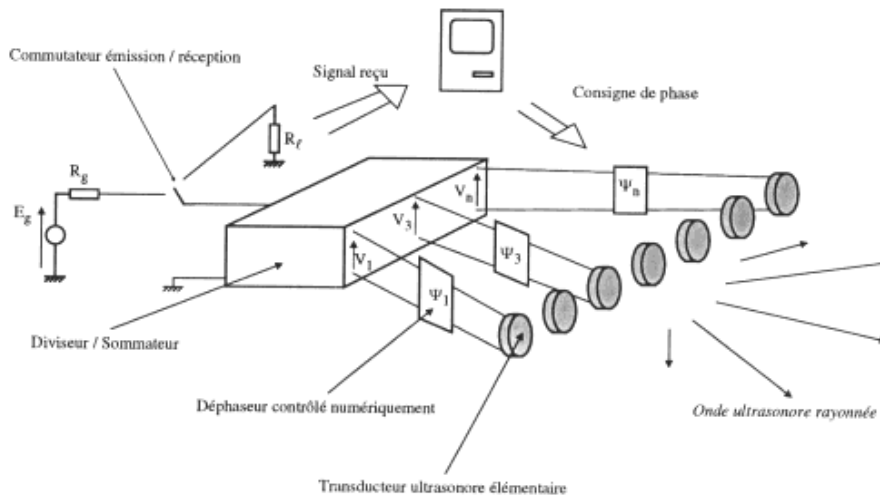
Le dispositif étudié est une sonde émettrice - réceptrice à ultrasons destinée à être appliquée sur le corps, à proximité de la zone à examiner:

Cette sonde est constituée d'un ensemble de transducteurs élémentaires à ultrasons. Chacun de ces transducteurs permet la transformation, de façon réversible, d'énergie électrique en énergie acoustique. Ils sont constitués d'une pastille cylindrique réalisée à partir d'une céramique piézo-électrique, métallisée sur les deux faces. L'association de ces transducteurs en un *réseau* constitué d'un grand nombre d'entre eux permet d'obtenir certaines propriétés géométriques pour l'onde ultrasonore émise.



En mode émission, le signal électrique est appliqué simultanément à l'ensemble des transducteurs. Alors qu'en mode réception, le signal électrique reçu est une combinaison linéaire des signaux reçus au niveau de chaque transducteur élémentaire. Dans ce problème on considère que le système fonctionne dans un seul mode à la fois (émission ou réception).

## Schéma électrique de principe:



Ce schéma est une représentation simplifiée de l'ensemble des connections électriques du montage. On distingue:

- un commutateur émission - réception
- un diviseur - sommateur (diviseur à l'émission et sommateur à la réception)
- des déphaseurs imposant, en émission ou en réception, un certain déphasage  $\psi_i$ . Ces déphaseurs sont contrôlés par un ordinateur.

A la lecture de ce schéma on constate donc qu'il est possible d'appliquer aux bornes de chaque transducteur une tension sinusoïdale, dont la fréquence est la même partout, dont l'amplitude est identique sur tous les transducteurs, mais dont la phase peut être choisie différemment pour chaque transducteur.

## Etude proposée:

La mise en oeuvre électrique d'un transducteur ultrasonore élémentaire est étudiée en première partie

On voit en seconde partie les propriétés de l'onde ultrasonore émise par un transducteur élémentaire, puis par le réseau.

Enfin, la dernière partie est consacrée à une étude simple de la propagation des ondes ultrasonores, avec des applications possibles dans le domaine de l'imagerie médicale.

## NOTATIONS

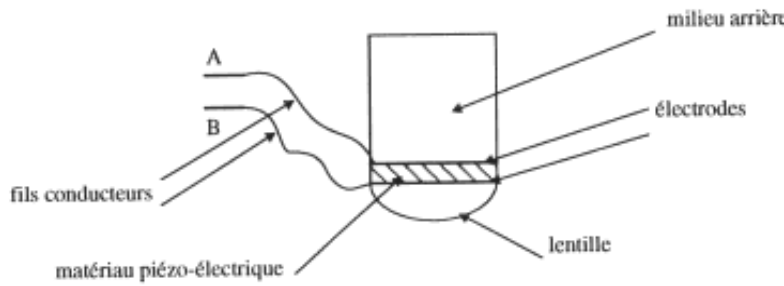
Lorsqu'une grandeur réelle  $x(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps, telle que  $x(t) = X \cos(\omega t + j)$ , on lui associe son amplitude complexe  $\underline{X}(j\omega)$ , notée aussi  $\underline{X}$ , telle que  $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ .

---

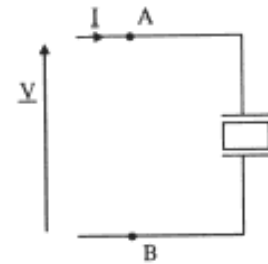
## **PREMIERE PARTIE**

### Comportement électrique d'un transducteur à ultrasons.

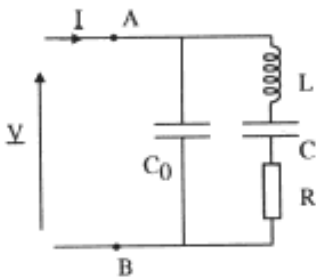
Le transducteur élémentaire étudié dans cette partie est réalisé de la façon suivante:



On utilisera le symbole ci-contre, pour représenter le dipôle A-B:



On admet que, dans une certaine zone de fonctionnement, le schéma électrique équivalent du dipôle vu entre les points A et B se ramène à:



Avec

$$C_0 = 22 \text{ pF}$$

$$C = 15 \text{ pF}$$

$$L = 190 \text{ } \mu\text{H}$$

$$R = 350 \text{ } \Omega$$

On supposera, dans toute cette question, que l'on est en régime sinusoïdal permanent.

On peut donc exprimer toute tension  $v(t)$  et tout courant  $i(t)$  par:

$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I \cos(\omega t + j)$$

On définit l'admittance du dipôle A-B par:  $\underline{Y}_{AB}(j\omega) = \frac{\underline{I}(j\omega)}{\underline{V}(j\omega)}$ , et son impédance par:

$$\underline{Z}_{AB}(j\omega) = \frac{\underline{V}(j\omega)}{\underline{I}(j\omega)}$$

## 1.1 Impédance du transducteur

1.1.1 Déterminer l'expression de l'admittance  $\underline{Y}_{AB}(j\omega)$  en fonction de  $L$ ,  $C$ ,  $C_0$  et  $R$ , puis celle de l'impédance  $\underline{Z}_{AB}(j\omega)$ .

1.1.2 Ecrire l'expression de l'impédance du dipôle A-B sous la forme:  $\underline{Z}_{AB}(j\omega) = \frac{a(\omega) + jb(\omega)}{c(\omega) + jd(\omega)}$

avec  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$ ,  $c(\omega)$ ,  $d(\omega)$  fonctions de  $\omega$  à valeurs réelles.

On impose  $a(\omega) = 1 - LC\omega^2$ . Préciser les expressions de  $b(\omega)$ ,  $c(\omega)$ ,  $d(\omega)$ .

## 1.2 Fréquences de résonance

On représente l'impédance  $\underline{Z}_{AB}(j\omega)$  à l'aide de sa partie réelle et de sa partie imaginaire:

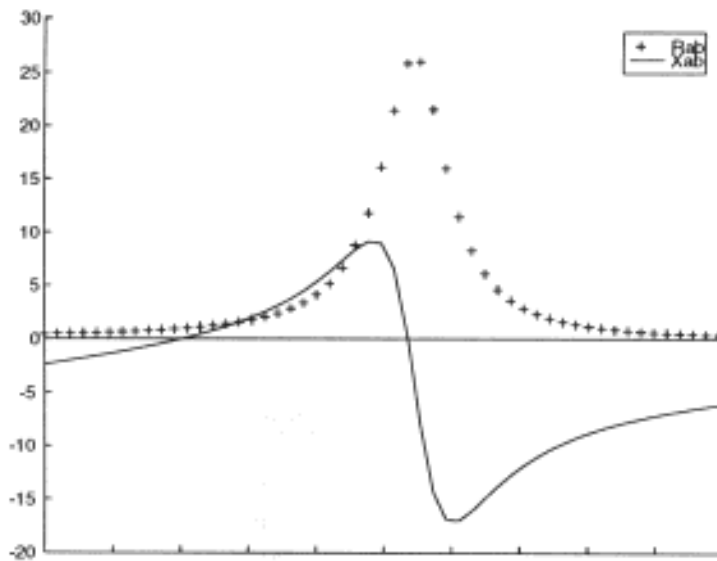
$$\underline{Z}_{AB}(j\omega) = R_{AB}(\omega) + jX_{AB}(\omega)$$

La courbe page suivante est une courbe type, représentative des variations de  $R_{AB}(\omega)$ , et de  $X_{AB}(\omega)$ , avec des axes des abscisses et des ordonnées en unités arbitraires.

On considère, dans cet énoncé, que le dipôle A-B est à la résonance lorsque la valeur de  $\omega$  est telle que:  $\text{Im}[\underline{Z}_{AB}(j\omega)] = 0$ . Il possède donc plusieurs pulsations de résonance.

1.2.1 Montrer que l'équation permettant d'obtenir les pulsations de résonance peut se mettre

sous la forme:  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right) = -\frac{R^2 C^2 \omega^2}{1 + \frac{C}{C_0}}$  avec  $\omega_s < \omega_p$



1.2.2 Donner les expressions de  $\omega_s$  et  $\omega_p$ .

1.2.3 Mettre l'expression précédente sous la forme:  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right) = -\frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}$

Préciser l'expression de  $Q$  en fonction des éléments du schéma équivalent du dipôle A-B.

1.2.4 Calculer les valeurs numériques de  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ ,  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  et  $Q$ .

### 1.3 Calcul approché des solutions. Impédance à la résonance

Lorsque  $Q$  est très grand ("tend vers l'infini"), les valeurs limites des pulsations de résonance, solutions de l'équation ci-dessus, sont  $\omega_1 = \omega_s$  et  $\omega_2 = \omega_p$ .

1.3.1 Lorsque  $Q$  a une valeur grande, mais finie, les solutions  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de l'équation précédente sont voisines de  $\omega_p$  et  $\omega_s$ . On cherche, dans cette question, la solution voisine de  $\omega_s$ , sous la forme  $\omega_1 = \omega_s (1 + \epsilon)$ , avec  $\epsilon$  quantité supposée infiniment petite à déterminer.

Donner l'expression de  $\epsilon$  en fonction de  $C$ ,  $C_0$ ,  $Q$ , et préciser sa valeur numérique en fonction des données du problème, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs à 1.

1.3.2 Montrer que lorsque l'on est à la résonance on a:  $\underline{Z}_{AB}(j\omega) = \text{Re}[\underline{Z}_{AB}(j\omega)] = \frac{a(\omega)}{c(\omega)} =$

$$\frac{b(\omega)}{d(\omega)}$$

1.3.3 Choisir, parmi les deux expressions  $R_s = \frac{a(\omega)}{c(\omega)}$  ou  $R_s = \frac{b(\omega)}{d(\omega)}$  celle qui est la plus

adaptée, vis à vis de l'approximation, pour calculer la valeur de la résistance  $R_s$ , à la pulsation  $\omega_1$ .

Interpréter ce résultat.

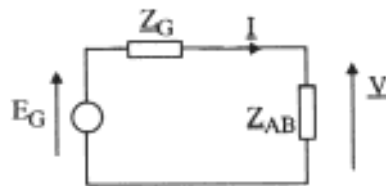
### 1.4 Excitation du transducteur: adaptation d'impédance.

On choisit d'exciter le transducteur à la pulsation  $\omega_s$  et on souhaite pouvoir transférer le maximum de puissance active du générateur de tension vers le transducteur. L'impédance interne  $\underline{Z}_G(j\omega)$  du générateur  $E_G$  sera écrite à partir de ses parties réelle et imaginaire:

$$\underline{Z}_G(j\omega) = R_G(\omega) + j X_G(\omega).$$

De même pour l'impédance  $\underline{Z}_{AB}$  du transducteur:  $\underline{Z}_{AB}(j\omega) = R_{AB}(\omega) + j X_{AB}(\omega)$ .

Le schéma est représenté figure suivante:



1.4.1 Calculer  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$  en fonction de  $E_G$  et des impédances du schéma.

1.4.2 En déduire la puissance active absorbée par l'impédance  $\underline{Z}_{AB}$ . L'exprimer en fonction de  $E_G$  et des parties réelles et imaginaires des impédances  $\underline{Z}_{AB}$  et  $\underline{Z}_G$ .

1.4.3 Quelle est la condition sur les parties imaginaires pour que la puissance transmise soit maximale?

- 1.4.4 En raisonnant sur le schéma équivalent du transducteur donné au début de cette partie, montrer qu'il se simplifie notablement si la pulsation d'excitation vaut  $\omega_s$ . Dessinez ce schéma simplifié.
- 1.4.5 Le générateur utilisé a une impédance interne  $\underline{Z}_G$  qui est réelle. Quel composant rajouter en parallèle sur le transducteur pour obtenir un transfert de puissance maximal?
- 1.4.6 Calculer la valeur numérique de ce composant.

## DEUXIEME PARTIE

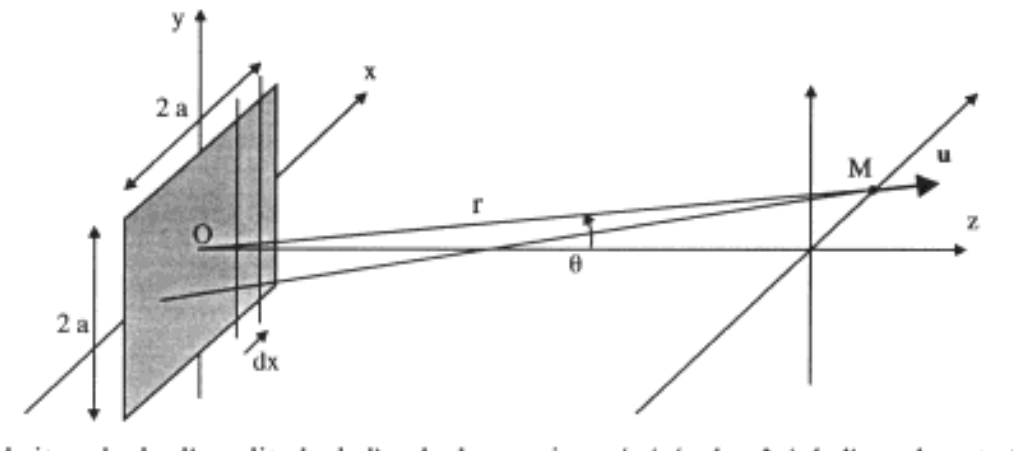
### Propriétés géométriques de l'onde émise

Dans cette seconde partie, le ou les transducteurs sont alimentés par un générateur de tension de fréquence constante.

Un transducteur ultrasonore, lorsqu'il est excité, génère des variations de pression dans le milieu environnant. Ces variations de pression constituent une onde ultrasonore. On s'intéresse à leur amplitude  $P(M)$ , et on notera  $\underline{P}(M)$  l'amplitude complexe associée à la variation de pression vibratoire au point M.

#### 2.1 Rayonnement d'un seul transducteur

Les transducteurs réellement utilisés ont une section circulaire, mais pour simplifier les calculs, on étudie dans cette question 2.1 le rayonnement d'un transducteur élémentaire de section carrée.



On souhaite calculer l'amplitude de l'onde de pression générée du côté de l'axe des  $z > 0$ , par le transducteur, en un point M situé dans le plan xOz et *très éloigné de la source*. Sa position est repérée par les deux grandeurs r et  $\theta$ . On a  $r = OM$ .

On suppose que la pression a une amplitude complexe constante  $P_0$  sur tout le carré  $2a \times 2a$ , et que la pression est nulle sur tout le reste du plan  $z = 0$ .

Pour obtenir la valeur de  $\underline{P}(M)$  dans le plan xOz on peut appliquer le principe de Huyghens-Fresnel: l'ouverture est "découpée" en une infinité de rubans de largeurs dx, repérés par la coordonnée x. On suppose que chacun de ces rubans génère une onde dont les lignes équi-phases dans le plan xOz sont des cercles centrés sur le ruban considéré. L'onde reçue en M est alors obtenue en effectuant la somme des ondes émises par chacun des rubans élémentaires.

L'onde émise par le ruban de largeur  $dx$  placé à l'origine est notée:

$$d\underline{P}(r) = A(r).e^{-jkr}.dx \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\lambda$  est la longueur d'onde dans le milieu.  $A(r)$  est une grandeur réelle, elle représente le module de l'onde, reçue en M, émise par le ruban de largeur  $dx$ .

2.1.1 Donner l'expression de  $\varphi(x) - \varphi(0)$ , différence de phase entre l'onde reçue en M, provenant de la fraction de l'ouverture de largeur  $dx$  placée à l'abscisse  $x$ , et l'onde reçue en M provenant d'une fraction de l'ouverture de largeur  $dx$  placée à l'origine. Cette expression doit être une fonction de  $x$ ,  $\sin(\theta)$  et  $k$ .

La convention de signe pour les phases est telle que  $\varphi(0) = -k \cdot r$ .

On tiendra compte du fait que  $r \gg a$

2.1.2 On admet que les contributions des sources élémentaires de largeur  $dx$  ont toutes la même amplitude  $A(r)$ , mais diffèrent uniquement par leurs phases  $\varphi(x)$ .

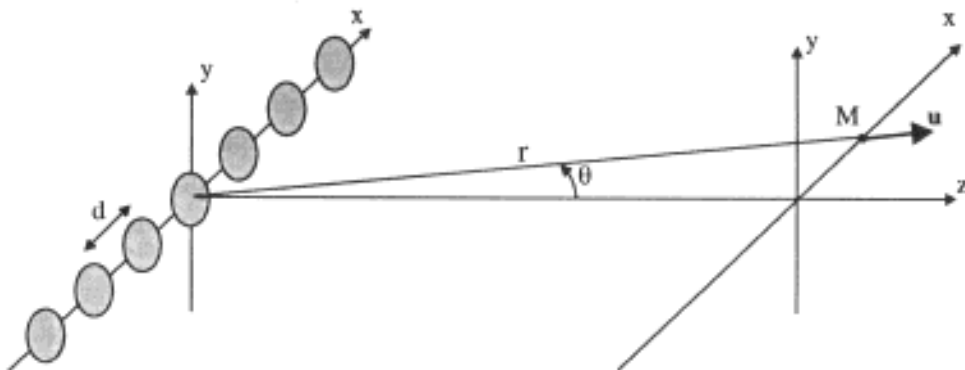
Donner l'expression de  $\underline{P}(r,\theta)$ ; la mettre sous la forme  $\|\underline{P}(r,\theta)\| = K(r) \cdot \left| \frac{\sin(X(\theta))}{X(\theta)} \right|$ .

2.1.3 On veut tracer l'allure de la courbe représentative de  $\|\underline{P}(r,\theta)\|$  à  $r$  constant, dans le cas où la longueur d'onde  $\lambda$  vaut 0,3 mm et la largeur du transducteur vaut  $2.a = 0,1$  mm.

- Soit  $F(\theta) = \left| \frac{\sin(X(\theta))}{X(\theta)} \right|$ .
- Montrer que  $F(\theta)$  est paire, qu'elle admet un extremum en 0.
- Calculer sa valeur pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$
- Observe-t-on une annulation de  $F(\sim)$ ?
- Enfin, tracer la courbe  $F(\theta)$ .

## 2.2 Rayonnement d'un réseau de 128 transducteurs alignés

On étudie le dispositif suivant.





Il y a 128 transducteurs à ultrasons répartis périodiquement selon l'axe Ox, de part et d'autre de l'origine, et avec un pas constant égal à d.

La position des éléments rayonnants est donnée par:

$$x_n = n.d, n \in \{-64, -63, \dots, -1, 0, 1, \dots, 62, 63\}, \text{ avec } d = 0,15\text{mm}.$$

La plus grande dimension du réseau est notée D et est voisine de 19,2 mm

On ne s'intéresse dans la suite qu'à l'expression du rayonnement dans le plan xOz. On supposera aussi, pour plus de simplicité, que chaque transducteur placé dans le réseau génère la même onde de pression que s'il était seul.

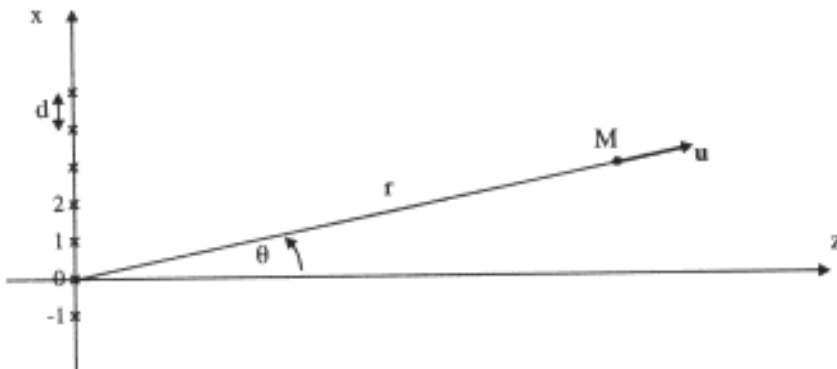
Un élément rayonnant élémentaire, placé à l'origine des axes, alimenté par une tension sinusoïdale pure crée donc une onde de pression telle que la pression au point M est donnée par:

$$P_0(M) = A(r) \cdot e^{-jkr} \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La fréquence est constante, et la longueur d'onde à cette fréquence est:  $\lambda = 0,3 \text{ mm}$ .

On s'intéresse au rayonnement à l'infini du réseau, lorsque tous les éléments sont alimentés en phase, avec la même amplitude

Soit M un point *très éloigné* de l'origine, repéré par sa distance r à l'origine, et par l'angle  $\theta$ :



2.2.1 Donner l'expression de  $\varphi_n - \varphi_0$ , différence de phase entre l'onde reçue en M, provenant du transducteur repéré par l'indice n, et l'onde reçue en M, émise par l'élément de référence d'indice n = 0.

2.2.2 En supposant que l'onde émise par chacun des éléments du réseau arrive en M avec une amplitude identique égale à A(r), mais avec une phase variable  $\varphi_n$ , montrer que l'amplitude de l'onde reçue en M,  $\|P(r,\theta)\|$ , est proportionnelle à une fonction du type:

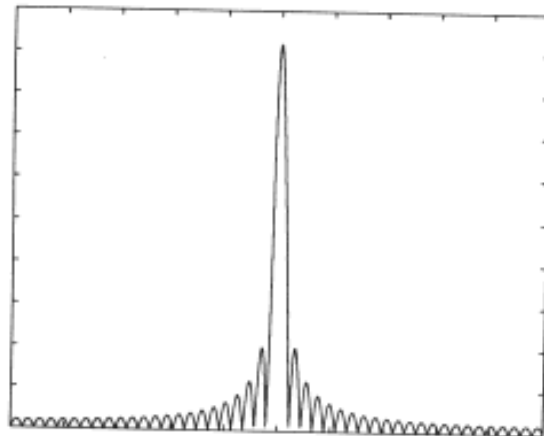
$$G(\theta) = \left| \frac{\sin(Nkd \sin(\theta))}{\sin(Pkd \sin(\theta))} \right|$$

N et P sont des nombres rationnels, préciser la valeur de ces deux nombres

\* Donner les valeurs numériques des produits N k d et P k d.

\* En effectuant un développement limité autour de 0, calculer G(0)

2.2.3 Le tracé de la fonction G(θ) en fonction de sin(θ) a l'allure suivante (ne pas se fier aux échelles):



\* Pour quelles valeurs de sin(θ), le numérateur de G(θ) s'annule-t-il ?

\* On définit la valeur angulaire du lobe central (centré sur  $\theta = 0$ ) comme l'écart entre les deux premières annulations de la fonction P. Donner sa valeur en degré.

2.2.4 Quelle est la dimension de l'obstacle, qui, placé à 10 cm du réseau émetteur, coupe exactement le lobe principal ? (En supposant que les approximations précédentes restent valables à cette distance)

2.2.5 Quelle qualité du réseau cette donnée représente-t-elle?

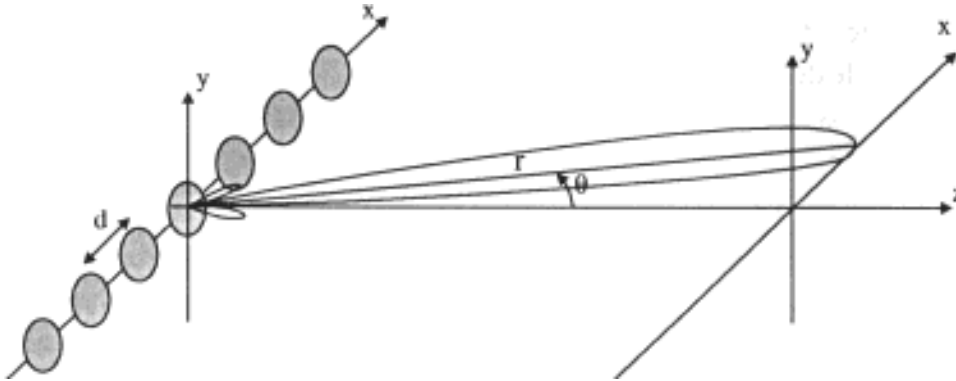
2.2.6 Comparer avec le résultat de la question 2.1

2.3 Balayage électronique

Les tensions d'alimentation de chaque transducteur sont de même amplitude, mais la phase varie selon la loi:

$$\varphi(V_n) = n \cdot \Psi$$

On admet que la phase de l'onde de pression émise par un élément, au niveau de celui-ci, est égale à la phase de la tension appliquée sur cet élément.

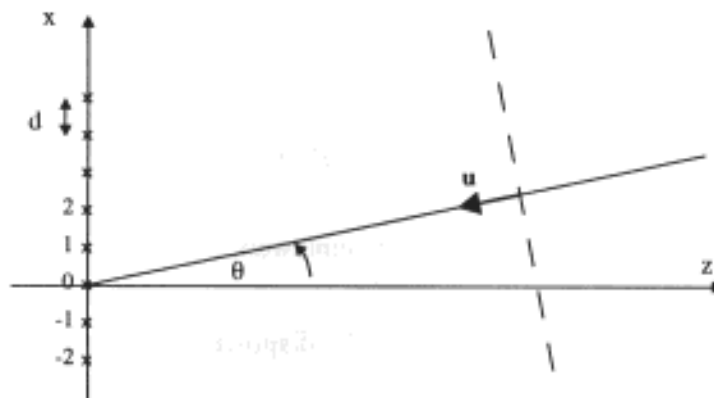


2.3.1 Calculer la nouvelle expression de  $P(r, \theta)$ .

2.3.2 Montrer que, pour une valeur de  $\Psi$  fixée, cela revient à avoir un décalage du maximum central. Lorsque  $\Psi = 10^\circ$ , de quel angle, le maximum central s'est-il décalé et dans quel sens ?

#### 2.4 Principe du retour inverse

Soit une onde plane, se dirigeant vers le réseau, et provenant de la direction repérée par l'angle  $\theta$ .



L'onde est plane, c'est à dire que la phase est constante dans un plan perpendiculaire au vecteur  $\vec{u}$ .

On note  $\varphi_0$  la phase de l'onde reçue au niveau de l'élément  $n = 0$ .

2.4.1 Donner l'expression de  $\varphi_n - \varphi_0$ , où  $\varphi_n$  représente la phase de l'onde reçue au niveau de l'élément  $n$ .

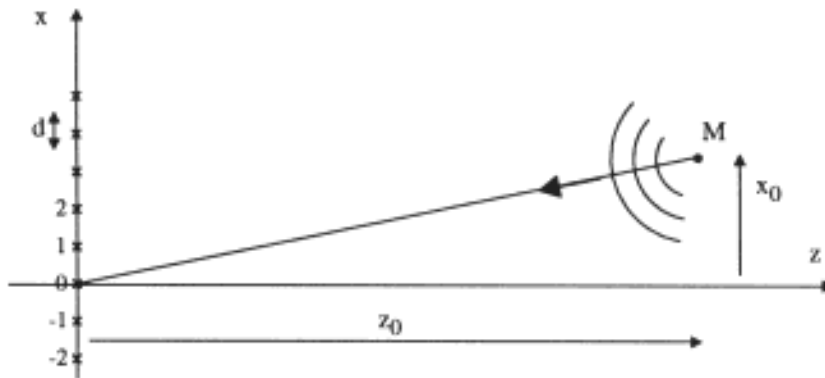
2.4.2 On suppose que le réglage des déphaseurs est le même en émission et en réception ( $\Psi_n = n\Psi$ )

Quelle est la direction privilégiée à l'émission ?

Quelle est la direction privilégiée en réception ? (C'est la direction telle que, après traversée des déphaseurs, tous les signaux issus des différents transducteurs se retrouvent en phase)

## 2.5 Focalisation

Soit une onde provenant d'une source ponctuelle M située à *distance finie* et se dirigeant vers le réseau. Le point M est repéré par ses coordonnées  $x_0$  et  $z_0$ :



2.5.1 Donner l'expression de  $\varphi_n - \varphi_0$ , déphasage de l'onde reçue au niveau de l'élément n, par rapport à l'élément de référence.

2.5.2 Le dispositif fonctionne maintenant en émission, et l'on souhaite concentrer le maximum de l'énergie au point M, à distance finie.

Comment cela est-il possible avec le dispositif complet, tel qu'il est décrit dans l'introduction ?

Comment doit varier la phase des tensions appliquées sur chacun des transducteurs ? (Utiliser, entre autres, le principe du retour inverse)

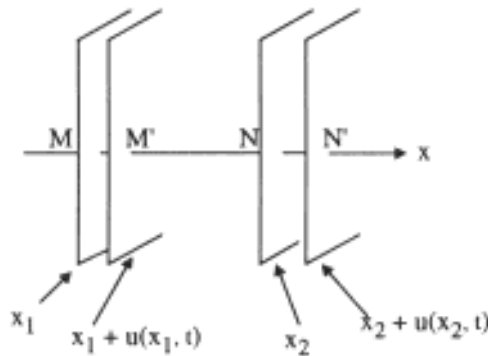
## TROISIEME PARTIE

### Propagation d'une onde sonore dans un fluide

*Nota Bene: Aucune connaissance préalable sur les ondes mécaniques n'est requise.*

On suppose que l'onde sonore, lorsqu'elle traverse le milieu, soumet celui-ci à des variations de pression telles que, pour une quantité de matériau considérée, la relation  $PV^\gamma = \text{cste}$  est vraie à tout instant.  $\gamma$  est une constante caractéristique du milieu.

Lorsqu'il est traversé par une onde sonore, on considère que le fluide est soumis à des variations de pression faibles devant la pression au repos  $P_0$ . On suppose de plus que la pression ne varie que suivant l'axe  $x$ . Ceci revient à dire que la pression est constante sur tout plan perpendiculaire à l'axe  $x$ , c'est à dire que l'on a affaire à une onde plane de pression. En tout point de ce fluide, la pression est une fonction de  $x$  et  $t$  qui peut donc s'écrire  $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$



On s'intéresse à une petite tranche de matériau de section  $S_0$ , qui, au repos, est située entre les points M et N d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$ . On pourra noter  $x_2 - x_1 = dx$ . En présence d'une onde sonore, la tranche de matériau s'est déplacée. Elle est située entre les points M' et N', d'abscisses respectives  $x_1 + u(x_1, t)$  et  $x_2 + u(x_2, t)$ .

On a alors  $u(x_2) = u(x_1) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , et la variation de pression de la tranche, par rapport à l'état de référence est donnée par:  $\Delta P = p(x,t)$ .

### 3.1 Mise en équation

3.1.1 Soit  $\Delta V$  la variation de volume subie par la tranche lorsque celle-ci passe de son état au repos à sa position repérée par M' et N'. Exprimer  $\Delta V$  en fonction de  $\Delta P$  et des caractéristiques du milieu.

3.1.2 Utiliser la relation caractéristique du milieu pour obtenir une relation entre  $p(x,t)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ .

3.1.3 Donner l'expression de la force exercée par le fluide situé à gauche de la tranche, sur celle-ci. Donner aussi l'expression de la force exercée sur la tranche par le fluide situé sur la droite de celui-ci. Bien préciser les orientations.

3.1.4 En déduire, par application du principe fondamental de la dynamique à la tranche M'N', l'équation différentielle gouvernant l'évolution de la variable u. On notera  $\rho_0$  la masse volumique de ce gaz.

3.1.5 En négligeant le terme a devant 1, montrer que cette relation se met sous la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ et donner l'expression de } v.$$

3.1.6 Montrer que la surpression p répond à la même équation différentielle.

3.1.7 Quelle est l'unité de v? Donner sa valeur numérique pour l'air à la pression atmosphérique (on donne  $\rho_0 = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ , et  $\gamma = 1,4$ ).

3.1.8 Pour l'eau, le produit  $\gamma \cdot P_0$  vaut  $2,25 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et on a  $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ . Calculer v.

### 3.2 Etude de la propagation

3.2.1 Montrer que la fonction  $u(x, t) = U \cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi)$  est solution de l'équation de la question 3.1.5.

3.2.2 Montrer que ceci correspond à une onde progressive et que la vibration se propage vers les x croissants. Que représente v ?

3.2.3 Quelle est l'expression de la longueur d'onde  $\lambda$ ? L'exprimer en fonction de la pulsation  $\omega$ .

3.2.4 Exprimer la vitesse instantanée  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  et la variation de pression p correspondant à cette solution de u.

3.2.5 Montrer que le rapport entre les amplitudes complexes de la pression et de la vitesse est constant, et ne dépend que du matériau. Ce rapport, caractéristique du milieu pour une onde plane se propageant dans un sens donné est appelé impédance mécanique du milieu. Il est tel que  $\underline{P} = Z_m \underline{V}$ .

3.2.6 Montrer que  $u(x, t) = U \cos(\omega(t + \frac{x}{v}) + \varphi)$  est aussi solution de l'équation.

3.2.7 A quoi correspond cette solution ?

3.2.8 Calculer, pour cette nouvelle solution, la relation entre  $\underline{P}$  et  $\underline{V}$ . L'exprimer en fonction de la grandeur  $Z_m$  trouvée en 3.2.5. Interpréter le résultat.

### 3.3 Propagation d'un milieu à un autre.

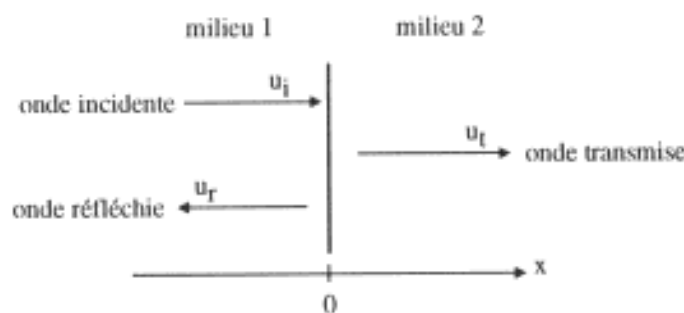
On considère une onde acoustique provenant du milieu 1 et atteignant l'interface avec le milieu 2. On suppose que l'interface entre les deux milieux est perpendiculaire à la direction de propagation. Les deux milieux sont supposés s'étendre jusqu'à l'infini.

On cherche la solution du système comme la superposition de trois ondes acoustiques:

$$u_i = U_i \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \varphi_i\right) \quad \text{onde incidente dans le milieu 1}$$

$$u_r = U_r \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right) + \varphi_r\right) \quad \text{onde réfléchie dans le milieu 1}$$

$$u_t = U_t \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + \varphi_t\right) \quad \text{onde transmise dans le milieu 2}$$



3.3.1 Quelles sont les équations à l'interface entre les deux milieux:

- \* Condition sur le déplacement  $u$  ?
- \* Condition sur la surpression  $p$  ?

3.3.2 Exprimer la condition de continuité sur  $u(x, t)$  à l'aide de  $\underline{U}_i(0)$ ,  $\underline{U}_r(0)$  et  $\underline{U}_t(0)$ , puis à l'aide de  $\underline{V}_i(0)$ ,  $\underline{V}_r(0)$  et  $\underline{V}_t(0)$ .

Exprimer la condition de continuité sur  $p(x, t)$  à l'aide de  $\underline{P}_i(0)$ ,  $\underline{P}_r(0)$  et  $\underline{P}_t(0)$ , puis à l'aide de  $\underline{V}_i(0)$ ,  $\underline{V}_r(0)$  et  $\underline{V}_t(0)$ . ( $Z_{m1}$  et  $Z_{m2}$  doivent figurer dans cette dernière expression)

3.3.3 En déduire les coefficients de réflexion  $r = \frac{\underline{V}_r(0)}{\underline{V}_i(0)}$  et de transmission  $t = \frac{\underline{V}_t(0)}{\underline{V}_i(0)}$ . Les exprimer en fonction de  $Z_{m1}$  et  $Z_{m2}$ .

3.3.4 On admettra que dans les conditions de ce problème, le coefficient de réflexion en puissance est  $R = ||r||^2$ , et que le coefficient de transmission en puissance est  $T = 1 - ||r||^2$ .

- \* Exprimer  $R$  et  $T$  en fonction de  $Z_{m1}$  et  $Z_{m2}$  en supposant que  $Z_{m1}$  et  $Z_{m2}$  sont des quantités réelles.

### 3.4 Application

Lors d'une échographie, un émetteur ultrasonore, appliqué sur la peau du patient émet une onde qui doit être transmise le mieux possible à l'intérieur du corps. On suppose qu'il s'agit d'une onde plane. Les caractéristiques des matériaux sont les suivantes:

air:	$Z_a = 430 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
corps:	$Z_c = 1,5.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
gel:	$Z_g = 1,4.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
émetteur:	$Z_e = 10.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

*On se place dans les conditions de la question 3.3: un seul interface séparant deux milieux infinis.*

3.4.1 Que vaut le coefficient  $T_{ea}$  à l'interface émetteur/air?

3.4.2 Que vaut le coefficient  $T_{ac}$  à l'interface air/corps?

On utilise maintenant un gel appliqué au préalable sur la peau.

3.4.3 Même question mais pour les coefficients émetteur/gel et gel/corps?

3.4.4 Conclusion, quel est l'intérêt d'utiliser du gel ?

