BANQUE PT 2006

EPREUVE DE PHYSIQUE B

PROBLEME A :

I) Principe du radar :

1) * amplitude E_0

* polarisation rectiligne selon Ox $\Rightarrow$ $\vec{E} \propto \vec{u_x}$

* propagation dans le sens des z croissant $\Rightarrow$ la phase est $(\omega t - kz)$

* $k = \frac{\omega}{c}$ (air assimilé au vide)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{u_x}}$$

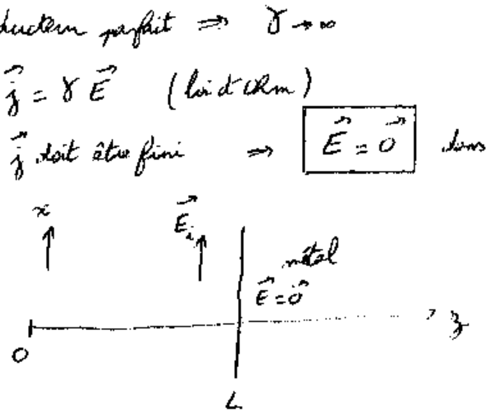
(choix : en $z=0$: $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \, \vec{u_x}$, pas de déphasage supplémentaire).

2) conducteur parfait $\Rightarrow$ $\gamma \to \infty$

or $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm)

et $\vec{j}$ doit être fini $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ dans le métal

3)



continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $z = L$ $\Rightarrow$ $\left(\vec{E_i} + \vec{E_r}\right)_{z=L} = \vec{E}_{métal} = \vec{0}$

$\vec{E_r}$ se propage dans le sens des z décroissant

$\Rightarrow$ la phase est $\left(\omega_1\left(t + \frac{z}{c}\right) + K\right)$

$$\vec{E_r} = E_1 \cos\left[\omega_1\left(t + \frac{z}{c}\right) + K\right] \vec{u_x}$$

$$E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{L}{c}\right)\right] \vec{u_x} + E_1 \cos\left[\omega\left(t + \frac{L}{c}\right) + K\right] \vec{u_x} = \vec{0} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_r} = -E_0 \cos\left[\omega\left(t + \frac{z - 2L}{c}\right)\right] \vec{u_x}}$$

$\Downarrow$ $\omega_1 = \omega$, $E_1 = E_0$ et $K = -\frac{2L}{c}$

4) distance parcourue par l'onde : $2L$ (aller-retour) à la vitesse c pendant le temps Δt

$\Rightarrow c = \frac{2L}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L = \frac{c \Delta t}{2} = 330 \text{ km}}$

II) Etude du détecteur :

1)a) $\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}}$

on a une OPPM se propageant dans le sens des z décroissant

$$\Rightarrow \vec{B_r} = \frac{-\vec{u_z} \wedge \vec{E_r}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos\left[\omega\left(t + \frac{z - 2L}{c}\right)\right] \vec{u_y}$$

$\Rightarrow$ $\vec{B_r}$ ne dépend pas de x, mais par contre, il dépend de z. Mais sur le détecteur, z varie peu (de $-\frac{k}{2}$ à $\frac{k}{2}$)

$\frac{k}{c} = 1,67 \cdot 10^{-11}$ $\quad$ $\omega \frac{k}{c} = 0,314 \text{ rad} = 18°$

$\Rightarrow$ la phase varie peu sur le détecteur

$\Rightarrow$ on peut considérer que le champ magnétique de l'onde réfléchie est quasiment uniforme sur le détecteur.

On va le choisir égal à $\vec{B_r}(z=0) = \frac{E_0}{c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{2L}{c}\right)\right] \vec{u_y}$

$$\phi = \iint_{détecteur} \vec{B_r} \cdot \vec{dS} \simeq \vec{B_r}(z=0) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ +S\vec{u_y}}}{\vec{S}}$$

(f orientation)

$S = kl \times N$ ← N spires

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{N E_0 kl}{c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{2L}{c}\right)\right]}$$

1)b) loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = + \frac{N E_0 kl}{c} \omega \sin\left[\omega\left(t - \frac{2L}{c}\right)\right]$

$$\Rightarrow V_{s\,eff} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{N E_0 kl \omega}{c\sqrt{2}} = V_{s\,eff}}$$

2)a) $\boxed{\frac{E_0}{\sqrt{2}} = E_{s\,eff} = \frac{V_{s\,eff}\, c}{N k l \omega} = 3,18 \cdot 10^{-7} \text{ V.m}^{-1}}$

2)b) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ $\Rightarrow$ $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$

avec $\underline{\vec{E}} = -E_0 \, e^{i\left(\omega\left(t + \frac{z - 2L}{c}\right)\right)} \vec{u_x}$

et $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \, e^{i\left(\omega\left(t + \frac{z - 2L}{c}\right)\right)} \vec{u_y}$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\left(-\frac{E_0^2}{c} \vec{u_z}\right) = -\frac{E_0^2}{2} \frac{1}{\mu_0 c} \vec{u_z}$$

$$P = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ unité}}{\vec{S}} = \frac{E_0^2}{2} \frac{1}{\mu_0 c} = \frac{E_{s\,eff}^2}{\mu_0 c}$$

$$\boxed{P = \frac{E_{s\,eff}^2}{\mu_0 c} = 2,68 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}}$$

III) Etude générale du guide d'onde :

1) Maxwell - Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = 0}$

Maxwell - flux : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$

Maxwell - Faraday : $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Maxwell - Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

2) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

or $E_y = E_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow$ E ne dépend pas de x $\rightarrow \boxed{E(x,y) = E(y)}$

3) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}\,\cancel{\mathrm{div}\,\vec{E}} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$= \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} = \Box\vec{E}}$

4) $\Delta\vec{E} \begin{vmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

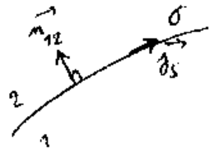
$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

$\Rightarrow E''(y) - E(y)k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)E(y) = 0$

$E''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E(y) = 0$

$\boxed{E''(y) + \chi^2 E(y) = 0}$

5)



juste de chaque côté de la surface :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \\ \vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{n}_{12} \end{array}}$$

6)a) Dans le métal conducteur parfait : $\vec{E} = \vec{0}$

continuité de la composante tangentielle du champ électrique

+ $\vec{E} \propto \vec{u_x}$ est tangentiel en $y = 0$ et $y = a$

$\Rightarrow \boxed{E(y=0) = E(y=a) = 0}$

6)b) $E''(y) + \chi^2 E(y) = 0$ avec $\chi^2 > 0$ et $\chi > 0$

$\Rightarrow E(y) = A\cos(\chi y) + B\sin(\chi y)$

or $E(0) = 0 = A \Rightarrow E(y) = B\sin(\chi y)$

et $E_0 = \mathrm{Sup}(|E(y)|)$ (erreur d'énoncé)

$\Rightarrow \boxed{E(y) = E_0 \sin(\chi y)}$

or $E(y=a) = 0 \Rightarrow \chi a = n\pi$

$\Rightarrow \boxed{\chi = \frac{n\pi}{a}}$ $n \in \mathbb{N}$ $(\chi > 0)$

* si $\chi^2 < 0$, on aurait des solutions de type exponentiel

$\chi^2 = (j\chi')^2 = -\chi'^2$

$E(y) = A e^{\chi' y} + B e^{-\chi' y}$

$E(0) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A$

$E(a) = 0 = A e^{\chi' a} + B e^{-\chi' a} = A\left(e^{\chi' a} - e^{-\chi' a}\right)$

$\Rightarrow$ soit $A = 0 \Rightarrow E(y) = 0$

$\Rightarrow$ soit $e^{\chi' a} = e^{-\chi' a} \rightarrow \chi' a = 0$ impossible

$\Rightarrow$ pas de solution si $\chi^2 < 0$

* si $\chi^2 = 0$: $E''(y) = 0 \Rightarrow E(y) = Ay + B$

$\left.\begin{array}{l} E(0) = 0 = B \\ E(a) = 0 = Aa + B = Aa \Rightarrow A = 0 \end{array}\right) \Rightarrow E(y) = 0$

$\Rightarrow$ pas de solution si $\chi^2 = 0$

7) $\boxed{\vec{E} = E_0 \sin\frac{n\pi y}{a}\, e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{u_x}}$

or $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \cancel{\frac{\partial}{\partial x}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} \\ -\frac{\partial E}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega\vec{B}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{E_0 n\pi}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}\, e^{i(\omega t - kz)} = -i\omega B_z \\ -ik E_0 \sin\frac{n\pi y}{a}\, e^{i(\omega t - kz)} = -i\omega B_y \end{cases}$

$\begin{cases} B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \sin\frac{n\pi y}{a}\, e^{i(\omega t - kz)} \\ B_z = \frac{E_0 n\pi}{a\omega}\cos\frac{n\pi y}{a}\, e^{i(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})} \end{cases}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y} + \frac{E_0 n\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{u_z}}$$

continuité de la composante normale de $\vec{B}$

$$\rightarrow B_y(y=0) = B_y(y=a) = \underset{\underset{\text{conducteur parfait}}{\uparrow}}{0}$$

or $B_y(y=0) = 0 \qquad (\sin 0 = 0)$

et $B_y(y=a) = 0 \qquad (\sin n\pi = 0)$

$\Rightarrow$ les conditions de continuité sont bien vérifiées.

8) $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = -\frac{E_0^2 n\pi}{\mu_0 a\omega}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\,\vec{u_y} + \frac{k}{\omega}\frac{E_0^2}{\mu_0}\sin^2\frac{n\pi y}{a}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\left[-\frac{n\pi}{4a\omega}\sin\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\sin\left[2(\omega t - kz)\right]\vec{u_y} + \frac{k}{\omega}\sin^2\frac{n\pi y}{a}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u_z}\right]}$$

$\langle \sin[2(\omega t - kz)] \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0\omega}\sin^2\frac{n\pi y}{a}\,\vec{u_z}}$$

9) $P = \displaystyle\iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0\omega}\iint \sin^2\frac{n\pi y}{a}\,\underset{\underset{b}{\uparrow}}{dx}\,dy$

$$P = \frac{E_0^2 k b}{2\mu_0\omega}\int_0^a \sin^2\frac{n\pi y}{a}\,dy$$

or $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$P = \frac{E_0^2 k b}{4\mu_0\omega}\int_0^a \left(1 - \cos\frac{2n\pi y}{a}\right)dy$$

$$= \frac{E_0^2 k b}{4\mu_0\omega}\left[a - \frac{a}{2n\pi}\left[\sin\frac{2n\pi y}{a}\right]_0^a\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{E_0^2 k a b}{4\mu_0\omega}}$$

10)a) si $k^2 < 0$ alors $k = -ik'$ avec k' réel

$\Rightarrow \vec{E} = E(y)\,e^{-k'z}\,e^{i\omega t}\,\vec{u_x}$

$\Rightarrow$ <u>atténuation $\rightarrow$ ne se propage pas</u> si $k^2 < 0$

or $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \chi^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$

Pour que le guide d'onde propage l'onde, il faut $k^2 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{\omega^2}{c^2} > \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \Rightarrow \omega > \dfrac{n\pi c}{a}$

$\rightarrow$ le guide d'onde est un filtre passe-haut.

Au mieux, on pourra transmettre dans le mode 1 $(n=1)$

$\boxed{\omega_c = \dfrac{\pi c}{a}}$ et il faut $\boxed{\omega > n\omega_c}$ pour que l'onde soit transmise ds le mode n.

10)b) $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{\pi c}{2\pi a} = \dfrac{c}{2a} \qquad f_c = \dfrac{c}{2a} = \dfrac{3\ 10^8}{2 \cdot 10^{-1}}$

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2a} = 1{,}5 \cdot 10^9\ \text{Hz} = 1{,}5\ \text{GHz}}$$

Cette fréquence est intermédiaire aux ondes hertziennes et TV $(f < f_c)$ et radar $(f > f_c)$, ce qui permet de ne guider que les ondes radar !

10)c) Il faut $f > nf_c \quad \Rightarrow n < \dfrac{f}{f_c} = \dfrac{3{,}0}{1{,}5} = 2$

$n < 2$

$\Rightarrow$ la seule possibilité est $\boxed{n = 1}$

$(n = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ pas de propagation$)$

* $P = \dfrac{E_0^2 k a b}{4\mu_0\omega}$ or $n = 1 \Rightarrow k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\mu_0\omega P}{k a b}} = \sqrt{\frac{4\mu_0 2\pi f P}{a b\sqrt{\frac{4\pi^2 f^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}}$$

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{8\mu_0 f P}{a b\sqrt{\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}} = 13{,}2\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$$

IV) Effets de dissipation :

1) Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = 0}$ $(\rho = 0)$

Maxwell-flux : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$

Maxwell-Faraday : $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

or loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\Big(\underbrace{\gamma\vec{E}}_{\text{courant de conduction}} + \underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{courant de déplacement}}\Big)$$

$$\frac{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{\gamma E} \underset{\text{ordre de grandeur}}{=} \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{\varepsilon_0 2\pi f}{\gamma} = \frac{2\pi f}{\mu_0 c^2 \gamma} = 1{,}7.10^{-7} \ll 1$$

$\Rightarrow$ on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction. $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}}$

2) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}\,\cancel{\mathrm{div}}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$$= \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$$

3)a) $\Delta\vec{E}\left|\begin{matrix}\Delta E_x\\ \Delta E_y\\ \Delta E_z\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\Delta E\\ 0\\ 0\end{matrix}\right. = \left|\ \cancel{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}\right.$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{avec } E = E_{0t}\,e^{i(\omega t - k'y)}$$

$$\Rightarrow E_{0t}(-k'^2)\,e^{i(\omega t - k'y)} = \mu_0\gamma i\omega E_{0t}\,e^{i(\omega t - k'y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k'^2 = -i\mu_0\gamma\omega}$$

or $-i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow k'^2 = \left((1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}\right)^2$

$$k'^2 = \left(\frac{1-i}{\delta}\right)^2 \rightarrow \boxed{k' = \pm\,\frac{1-i}{\delta}}$$

3)b) $\Rightarrow \vec{E} = E_{0t}\,e^{-\frac{y}{\delta}}\,e^{i(\omega t - \frac{y}{\delta})}\vec{u_x} + \underset{\substack{\text{tend vers } \infty \\ \text{quand } y \to +\infty}}{E'_{0t}\,e^{+\frac{y}{\delta}}}\,e^{i(\omega t + \frac{y}{\delta})}\vec{u_x}$ $\rightarrow E'_{0t} = 0$

[illegible]

$$\rightarrow \boxed{\vec{E} = E_{0t}\,e^{-\frac{y}{\delta}}\,e^{i(\omega t - \frac{y}{\delta})}\vec{u_x}}$$

$\Rightarrow$ l'amplitude du champ électrique décroît comme $e^{-\frac{y}{\delta}}$.

Au bout de quelques δ, $\vec{E}$ est quasiment nul dans le conducteur $\Rightarrow$ $\vec{E}$ est non nul sur l'"épaisseur de peau" δ.

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} = 9{,}2.10^{-6}\ \mathrm{m}} \quad \text{très faible}$$

$\rightarrow$ l'onde pénètre très peu dans le métal, d'où le choix "$\vec{E} = \vec{0}$ dans le métal" pour les précédentes parties.

4) $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{j} = \gamma E_{0t}\,e^{-\frac{y}{\delta}}\,e^{i(\omega t - \frac{y}{\delta})}\vec{u_x}}$

$$\boxed{\vec{j} = \gamma E_{0t}\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\vec{u_x}}$$

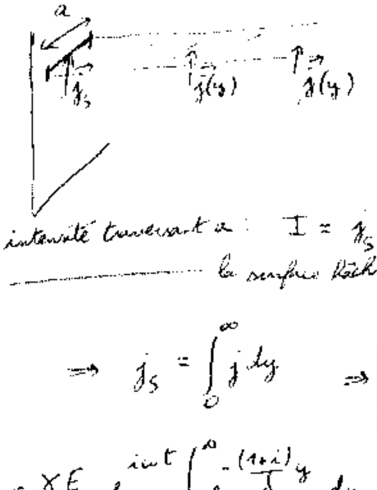
$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E_{0t}^2\,e^{-\frac{2y}{\delta}}\cos^2\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)$$

$$\left\langle\frac{dP_J}{d\tau}\right\rangle = \frac{\gamma E_{0t}^2}{2}\,e^{-\frac{2y}{\delta}}$$

$$\langle P_J\rangle = \frac{\gamma E_{0t}^2}{2}\,S\int_0^\infty e^{-\frac{2y}{\delta}}\,dy = \frac{\gamma E_{0t}^2 S}{2}\left(-\frac{\delta}{2}\right)\left[e^{-\frac{2y}{\delta}}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\langle P_J\rangle = \frac{\gamma S\delta E_{0t}^2}{4}}$$

5)a)



intensité traversant a : $I = j_s a$

——— la surface hachurée $= \iint j\,\underset{a}{dz}\,dy$

$$\Rightarrow j_s = \int_0^\infty j\,dy \quad \Rightarrow \boxed{\vec{j_s} = \int_0^\infty \vec{j}\,dy}$$

$$\underline{\vec{j_s}} = \gamma E_{0t}\,e^{i\omega t}\int_0^\infty e^{-\frac{(1+i)}{\delta}y}\,dy\,\vec{u_x}$$

$$= \gamma E_{0t}\,e^{i\omega t}\left(-\frac{\delta}{1+i}\right)\left[e^{-\frac{(1+i)}{\delta}y}\right]_0^\infty\vec{u_x}$$

$$\underline{\vec{j_s}} = \frac{\gamma\delta E_{0t}}{1+i}\,e^{i\omega t}\,\vec{u_x} = \boxed{\frac{\gamma\delta E_{0t}}{\sqrt{2}}\,e^{i(\omega t - \frac{\pi}{4})}\,\vec{u_x} = \underline{\vec{j_s}}}$$

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{\gamma\delta E_{0t}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_x}$$

5)b) $$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma\delta E_{0t}^2 S}{4}$$

$$j_{s_{eff}} = \frac{j_{s\,max}}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma\delta E_{0t}}{2} \Rightarrow j_{s_{eff}}^2 = \frac{\gamma^2\delta^2 E_{0t}^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P_J \rangle = \frac{j_{s_{eff}}^2}{\gamma\delta} S}$$

6)a) cf III)7) : $$\vec{B}(y=0) = \frac{E_0(z)\,n\pi}{a\omega} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{B}(y=a) = + \frac{E_0(z)\,n\pi}{a\omega} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_z \text{ si } n \text{ pair}$$

$$= - \frac{E_0(z)\,n\pi}{a\omega} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_z \text{ si } n \text{ impair}$$

discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$:

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = \mu_0 \vec{j}_s$$

en $y=0$: $\vec{u}_y \wedge \left(\vec{B}(y=0) - \vec{0}\right) = \mu_0 \vec{j}_s$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_s(y=0) = \frac{E_0(z)\,n\pi}{\mu_0 a\omega} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_x}$$

en $y=a$: $\vec{u}_y \wedge \left(\vec{0} - \vec{B}(y=a)\right) = \mu_0 \vec{j}_s$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_s(y=a) = \pm \frac{E_0(z)\,n\pi}{\mu_0 a\omega} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_x}$$

(+ si n est impair , − si n est pair)

6)b) cf 5)b) : $$dP = \frac{j_{s_{eff}}^2}{\gamma\delta} \underbrace{b\,dz}_{S}$$ pour chaque paroi

or pour chaque paroi $$j_{s_{eff}} = \frac{E_0(z)\,n\pi}{\mu_0 a\omega\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow dP = \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ parois}}}{2} \times \frac{E_0^2(z)\,n^2\pi^2}{\mu_0^2 a^2\omega^2\,2} \frac{1}{\gamma\delta}\,b\,dz$$

or $\chi^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \Rightarrow dP = \frac{E_0^2(z)\,\chi^2}{\mu_0^2\omega^2\gamma\delta}\,b\,dz$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0^2\omega^2\gamma\delta} = \frac{\delta^2}{2\mu_0\omega\delta} = \frac{\delta}{2\mu_0\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{dP = \frac{b\,E_0^2(z)\,\chi^2\delta}{2\mu_0\omega}\,dz}$$

cf III)9) : la puissance moyenne traversant la section droite en z est $$P(z) = \frac{E_0^2(z)\,k a b}{4\mu_0\omega}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arrivant en } z}}{P(z)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dissipée}}}{dP} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sortant en } z+dz}}{P(z+dz)}$$

$$\Rightarrow \frac{ka\cancel{b}}{4\cancel{\mu_0\omega}} \underbrace{\left(E_0^2(z) - E_0^2(z+dz)\right)}_{-dE_0^2} = \frac{\cancel{b}\,E_0^2(z)\,\chi^2\delta}{2\cancel{\mu_0\omega}}\,dz$$

$$\Rightarrow -\frac{ka}{4}\frac{dE_0^2(z)}{dz} = \frac{\chi^2\delta}{2} E_0^2(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE_0^2(z)}{dz} + \frac{2\chi^2\delta}{ak} E_0^2(z) = 0}$$

6)c) On pose $\boxed{\ell_0 = \frac{ak}{2\chi^2\delta}} \Rightarrow \frac{dE_0^2(z)}{dz} + \frac{E_0^2(z)}{\ell_0} = 0$

$$\Rightarrow E_0^2(z) = A\,e^{-\frac{z}{\ell_0}} \Rightarrow E_0(z) = \sqrt{A}\,e^{-\frac{z}{2\ell_0}}$$

or en $z=0$, $E_0(z=0) = E_0 = \sqrt{A}$

$$\Rightarrow \boxed{E_0(z) = E_0\,e^{-\frac{z}{2\ell_0}} \quad \text{avec } \ell_0 = \frac{ak}{2\chi^2\delta}}$$

On veut propager l'onde ⇒ $E_0(z)$ doit rester "grand"

⇒ il faut ℓ_0 "grand" ⇒ $\frac{k}{\chi^2}$ "grand"

or $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \chi^2}$

⇒ il faut $\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \chi^2}}{\chi^2}$ le + grand possible

⇒ χ^2 le + petit possible or $\chi = \frac{n\pi}{a}$

⇒ il faut n le + petit possible ⇒ on choisit $\boxed{n=1}$

6)d) $n=1 \Rightarrow \chi = \frac{\pi}{a}$ et $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$

$$\ell_0 = \frac{a\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}{2\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \ell_0 = 300\text{ m} \\ 2\ell_0 = 600\text{ m} \end{array}}$$

valeurs "grandes"

BANQUE PT 2006

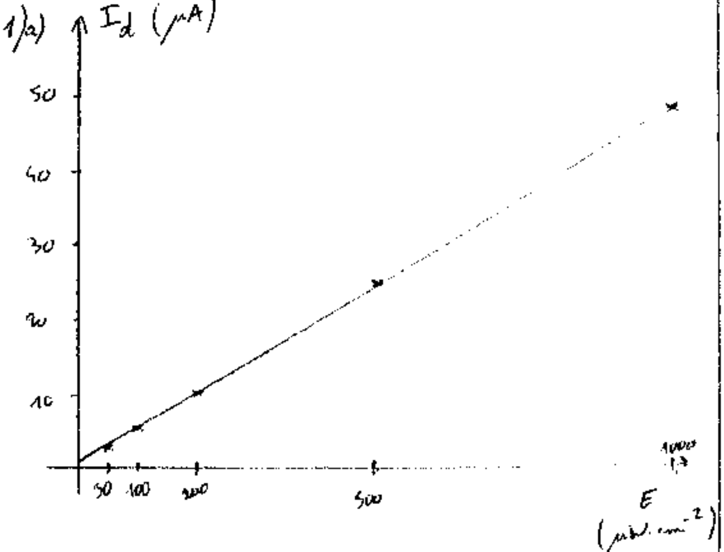
EPREUVE DE PHYSIQUE B

PROBLEME B : Acquisition d'une figure d'interférence

I) Photodiode :

1) Etude de la photodiode.

1)a)



1)b) On obtient une droite $\Rightarrow I_d = a_i E + b_i$

a_i est en $A.m^2 W^{-1}$ $\qquad$ b_i est en A

On obtient une droite :

* de pente $a_i = 0{,}048\ \mu A.cm^2.\mu W^{-1} = 4{,}8.10^{-6}\ A\, m^2 W^{-1}$

* d'ordonnée à l'origine $b_i = 0{,}28\ \mu A$

b_i est le courant qui circule dans la diode en l'absence d'éclairement.

1)c) * $600 < 633 < 1090$ $\Rightarrow$ la photodiode est sensible à la lumière émise par ce laser.

* De plus, le laser a une grande longueur de cohérence $\Rightarrow$ il est plus facile d'observer des interférences avec un laser qu'avec une lampe spectrale, ou pire, qu'avec une lumière blanche.

2) Conversion de l'éclairement en tension.

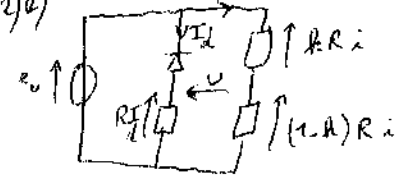
2)a) loi d'Ohm : $U = R I_d = \boxed{(Ra_i)E = U}$

$\Rightarrow$ U est proportionnelle à E

$R = \frac{U}{a_i E} = \frac{U_r}{a_i E_r} = \boxed{210\ k\Omega = R}$

$U = (Ra_i)E = \frac{U_r}{E_r} E \qquad \boxed{U = \frac{U_r E}{E_r}}$

2)b)



loi des mailles : $e_0 = kRi + (1-k)Ri = Ri$

$U = 0 \Rightarrow RI_d = (1-k)Ri = (1-k)e_0$

$$\left.\begin{array}{l} Ra_i E_a = (1-k)e_0 \\ \text{or } Ra_i = \frac{U_r}{E_r} \end{array}\right\} \frac{U_r E_a}{E_r} = (1-k)e_0$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 1 - \frac{U_r E_a}{e_0 E_r}}$$

Il s'agit de brancher un voltmètre pour mesurer U. On change la valeur de k ($kR + (1-k)R$ est un potentiomètre) jusqu'à avoir $U = 0$.

2)c) on a (loi des mailles) : $U + (1-k)Ri = RI_d$

or $e_0 = Ri$

$\Rightarrow U = Ra_i E_i - (1-k)e_0$

$= \frac{U_r}{E_r} E_i - \frac{U_r}{E_r} E_a$

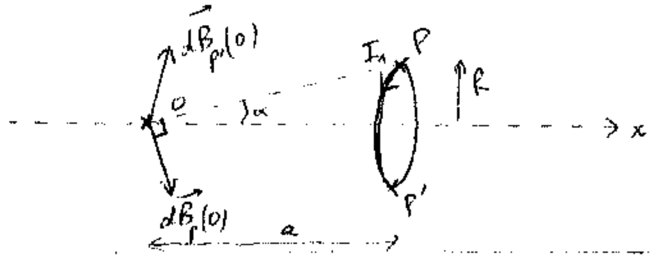
$$\boxed{U = \frac{U_r}{E_r}(E_i - E_a)}$$

II) Moteur pas à pas :

1)a) * Tous les plans contenant l'axe (Ox) sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant 1.

Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}(O) \in$ à tous ces plans $\Rightarrow$ $\vec{B}_1$ est porté par $\vec{u}_x$

* 2ème méthode : loi de Biot et Savart :



$$\vec{dB}_P(O) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 \vec{dl} \wedge \vec{PO}}{PO^3}$$

$$\vec{dB}_{P'}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 \vec{dl} \wedge \vec{P'O}}{P'O^3}$$

P' et P sont sur un même diamètre de la spire

$\Rightarrow \vec{dB}_P(O) + \vec{dB}_{P'}(O)$ porté par $\vec{u_x}$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{B}_1 \text{ porté par } \vec{u_x}}$

1)b) $\vec{dB}_P(O) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1 \vec{dl} \wedge \vec{PO}}{PO^3}$

$$\vec{dB}_P(O)\cdot\vec{u_x} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi\, PO^3}\underbrace{\left(\vec{dl}\wedge\vec{PO}\right)\cdot\vec{u_x}}$$

$$= \left(\vec{PO}\wedge\vec{u_x}\right)\cdot\vec{dl}$$

$$= PO \sin\alpha \, dl$$

$$= R\,dl$$

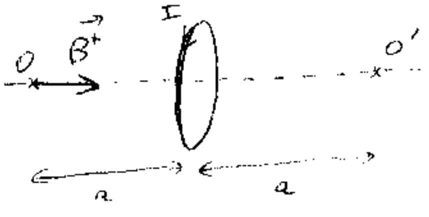
$PO = \sqrt{a^2+R^2}$ (thm de Pythagore)

$$\Rightarrow \vec{dB}_P(O)\cdot\vec{u_x} = \frac{\mu_0 I_1 R}{4\pi(a^2+R^2)^{3/2}}\,dl$$

$$\Rightarrow \vec{B}(O)\cdot\vec{u_x} = \frac{\mu_0 I_1 R\, 2\pi R}{4\pi(a^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B^+} = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}\vec{u_x}}$$

1)c) On ne considère pour l'instant qu'une spire.



Soit O' le symétrique de O / spire.

Le plan contenant la spire est plan de symétrie de la distribution de courant, or $\vec{B}$ pseudo-vecteur

$\Rightarrow \vec{B}(O')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(O)$ par rapport à ce plan

$\Rightarrow \vec{B}(O') = \vec{B}(O)$

$\Rightarrow$ le champ créé par la spire placée en $x = -a$ au point O est égal à $\vec{B^+}$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = 2\vec{B^+} \qquad \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\vec{u_x}}$$

2)a) référentiel : labo supposé galiléen

système : rotor

actions extérieures :

- frottements fluides : $\Gamma_z = \Gamma_f = -\alpha\dot{\theta}$
- couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_1$ (car $\vec{B}$ uniforme)

  $\vec{\Gamma} = \mathcal{M} B_1 (-\sin\theta)\,\vec{u_z}$
- articulation parfaite $\Rightarrow \Gamma_z = 0$

On applique le thm du moment cinétique projeté sur (Oz) :

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = J\ddot{\theta} = -\alpha\ddot{\theta} - \mathcal{M}B_1 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{\mu_0 \mathcal{M} I_1 R^2}{J(a^2+R^2)^{3/2}}\sin\theta = 0}$$

équilibre $\Rightarrow$ pas de mouvement $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\theta = 0 \text{ est une position d'équilibre}}$

Oublions le terme de frottement ($\dot{\theta}$) qui ne change rien de la stabilité de l'équilibre !

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

Partant de l'équilibre $\theta = 0$, on augmente θ légèrement

$\Rightarrow \sin\theta > 0 \Rightarrow \ddot{\theta} < 0$ qui va avoir tendance à ramener le dipôle vers $\theta = 0$.

$\Rightarrow$ <u>la position d'équilibre est stable.</u>

2)b) petites oscillations $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$\rightarrow \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

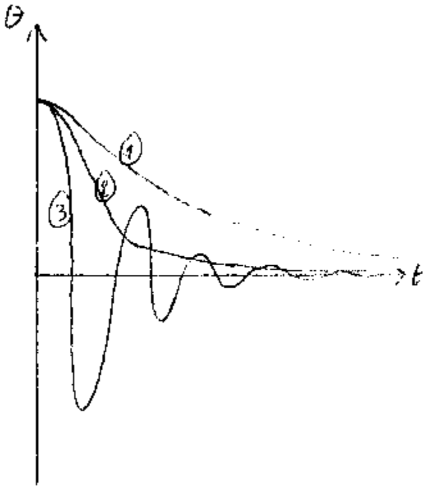
avec $\omega_0^2 = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} I_1 R^2}{J(a^2+R^2)^{3/2}}$ et $2\sigma\omega_0 = \dfrac{\alpha}{J}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathcal{M} I_1 R^2}{J(a^2+R^2)^{3/2}}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\alpha}{2J}\sqrt{\frac{J(a^2+R^2)^{3/2}}{\mu_0 \mathcal{M} I_1 R^2}}}$$

2)c) équation caractéristique : $r^2 + 2\sigma\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta' = \sigma^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\sigma^2 - 1)$$

- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \sigma > 1 \Rightarrow$ régime apériodique ①
- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \sigma = 1 \Rightarrow$ régime apériodique critique ②
- $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \sigma < 1 \Rightarrow$ régime pseudo-périodique amorti ③



2)d) retour le + rapide à l'équilibre $\Rightarrow$ régime apériodique critique

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 1}$$

$$\Rightarrow \theta = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

or $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ (cond. initiales)

$$\Rightarrow \theta(t=0) = B = \theta_0$$

$$\dot{\theta} = e^{-\omega_0 t}\left[(At + \theta_0)(-\omega_0) + A\right]$$

$$\dot{\theta}(0) = A - \omega_0\theta_0 = 0 \Rightarrow A = \omega_0\theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}}$$

3)a) loi des mailles : $U_1 = rI_1 + L\frac{dI_1}{dt}$

or pour $t > 0$, $U_1 = -V_0$

$$\Rightarrow L\frac{dI_1}{dt} + rI_1 = -V_0$$

$$\Rightarrow \frac{L}{r}\frac{dI_1}{dt} + I_1 = -\frac{V_0}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau\frac{dI_1}{dt} + I_1 = -\frac{V_0}{r} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{r}}$$

3)b) Pour $t < 0$: $U_1 = +V_0 \Rightarrow \tau\frac{dI_1}{dt} + I_1 = +\frac{V_0}{r}$

$\Rightarrow$ à $t = 0^-$, $I_1 = +\frac{V_0}{r}$ car $U_1 = +V_0$ depuis un long moment $\Rightarrow$ le régime permanent est atteint.

Or on a continuité de l'intensité dans une bobine

$(E = \frac{1}{2}Li^2$ continue$) \Rightarrow I_1(t=0^+) = I_1(t=0^-)$

$$\Rightarrow \boxed{I_1(t=0^+) = +\frac{V_0}{r}}$$

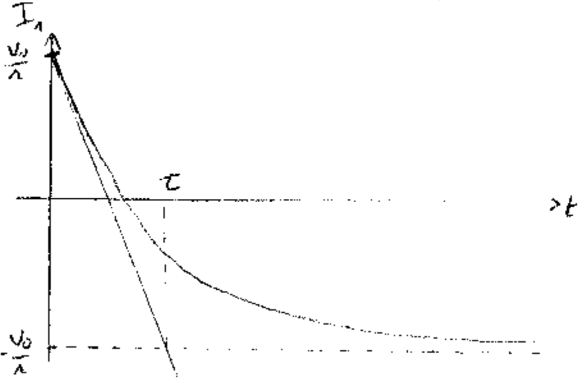
$\tau\frac{\cancel{dI_1}}{\cancel{dt}} + I_1 = -\frac{V_0}{r}$ $\Rightarrow \boxed{I_1(t\to\infty) = -\frac{V_0}{r}}$

régime permanent
$(t \to \infty)$

3)c) $I_1 = Ke^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{V_0}{r}$

or $I_1(t=0) = +\frac{V_0}{r} = K - \frac{V_0}{r} \Rightarrow K = \frac{2V_0}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{I_1(t) = \frac{V_0}{r}\left(2e^{-t/\tau} - 1\right)}$$



$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{2V_0}{r}\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\left.\frac{dI_1}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2V_0}{r\tau} = -\frac{\frac{2V_0}{r}}{\tau}$ d'où τ graphiquement

4)a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\left(I_1\vec{u_x} + I_2\vec{u_y}\right)$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0\mathcal{M}R^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\left(-I_1\sin\theta + I_2\cos\theta\right)\vec{u_z}$$

équilibre $\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow I_1\sin\theta = I_2\cos\theta$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{I_2}{I_1}$$

or $U_1 = U_2 = +V_0 \Rightarrow I_1 = I_2 = +\frac{V_0}{r}$ en régime permanent

$$\Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = 45°}$$

4)b) $I_2 = +\frac{V_0}{r}$ et $I_1 = -\frac{V_0}{r} \Rightarrow \tan\theta = -1$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 135°}$$

4)c)

	U_1	U_2	θ
	$+V_0$	$+V_0$	45°
1 ↓	$-V_0$	$+V_0$	135°
2 ↓	$-V_0$	$-V_0$	225°
3 ↓	$+V_0$	$-V_0$	315°
4 ↓	$+V_0$	$+V_0$	405° ⟺ 45°

⟹ $\boxed{\text{4 pas par tour}}$

facteur limitant la vitesse de rotation du moteur : c'est le fait que les courants ne basculent pas instantanément de $+\frac{V_0}{r}$ à $-\frac{V_0}{r}$ $(\tau \neq 0)$ à cause de l'inductance L.

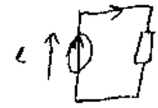
4)d) Les moteurs pas à pas servent à faire du <u>positionnement précis</u> (il suffit de choisir une des 200 positions d'équilibre).

ex : scanner, imprimantes

5)a) loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = +\phi_0 \dot{\theta} \sin\theta$

$$\boxed{e = \phi_0 \dot{\theta} \sin\theta}$$

on néglige L ⟹ schéma électrique des spires 1 :



$$\Rightarrow i_1 = \frac{e}{r}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{\phi_0}{r} \dot{\theta} \sin\theta}$$

5)b) cf II)1)c) avec $a \gg R$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 R^2}{(a^2+R^2)^{3/2}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 i_1 R^2}{a^3} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \sin\theta \, \vec{u}_x}$$

$$\vec{\Gamma}_1 = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \sin\theta \, (-\sin\theta) \, \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_1 = -\frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \sin^2\theta}$$

5)c) $\phi_2 = \phi_0 \sin\theta \Rightarrow e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\phi_0 \dot{\theta} \cos\theta$

$$i_2 = -\frac{\phi_0}{r} \dot{\theta} \cos\theta$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2 R^2}{a^3} \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \cos\theta \, \vec{u}_y$$

$$\vec{\Gamma}_2 = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \cos\theta \, (\cos\theta) \, \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_2 = -\frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} \cos^2\theta}$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \boxed{-\frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3} \dot{\theta} = \Gamma}$ car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

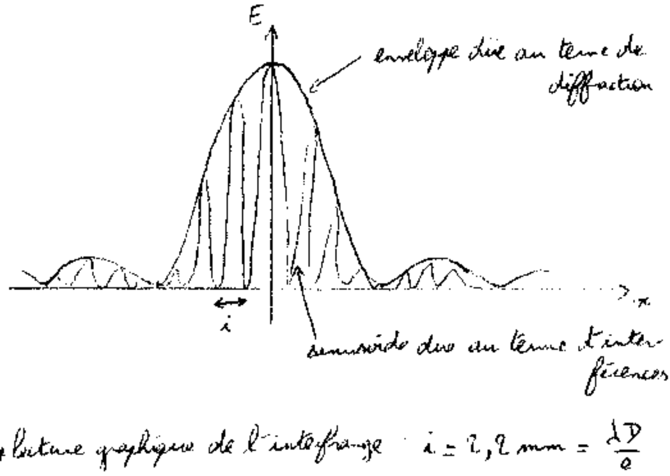
⟹ couple qui s'oppose au mouvement $(\propto -\dot{\theta})$
(⟹ on retrouve la loi de Lenz)

$\Gamma \propto -\dot{\theta}$ ⟹ il suffit de remplacer α par $\left(\alpha + \frac{\mu_0 \mathcal{M} \phi_0 R^2}{r a^3}\right)$.

III) <u>Interprétation de la courbe d'interférence :</u>

1) <u>Exploitation de la courbe d'interférence :</u>

1)a) $$E = E_0 \underbrace{\left(1 + \cos\frac{2\pi e x}{\lambda D}\right)}_{\text{terme d'interférence}} \underbrace{\operatorname{sinc}^2 \frac{\pi d x}{\lambda D}}_{\text{terme de diffraction}}$$



1)b) * lecture graphique de l'interfrange $i = 2,2\ \text{mm} = \frac{\lambda D}{e}$

$$\Rightarrow e = \frac{\lambda D}{i} = 5,8 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{e = 0,58\ \text{mm}}$$

* annulation (la 1ère) du sinc² pour $\pi = \frac{\pi d x}{\lambda D}$

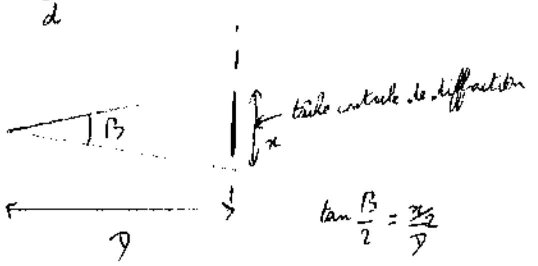
$$\Rightarrow x = \frac{\lambda D}{d} = 10\ \text{mm} \qquad \Rightarrow d = \frac{\lambda D}{x}$$

↑ lecture graphique

$$\Rightarrow \boxed{d = 0,13\ \text{mm}}$$

* ou 2ème méthode (cf énoncé) :

$$\beta = \frac{2\lambda}{d}$$



$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{x/2}{D}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2x/2}{D} = \frac{x}{D}$$

or $\beta = \frac{2\lambda}{d}$ $\Rightarrow$ $d = \frac{2\lambda D}{x}$

avec $x = 20$ mm (lecture graphique)

$$\Rightarrow \boxed{d = 0{,}13 \text{ mm}}$$

1)c) caméra avec capteurs CCD (plusieurs capteurs ⇒ pas besoin de translater).

2) Vérification optique de l'écartement :

2)a) $\boxed{-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}}$

or $\overline{OF'} = +f'$ (lentille convergente)

$\overline{OA} = p$

$\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = p + L$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p} + \frac{1}{p+L} = \frac{1}{f'}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{-p} - L \cancel{+p}}{p(p+L)} = \frac{1}{f'} \Rightarrow p(p+L) = -Lf'$$

$$\Rightarrow \boxed{p^2 + Lp + Lf' = 0}$$

$\Delta = L^2 - 4Lf' = L(L-4f') > 0$ (cf AN)

$$\Rightarrow p = \frac{-L \pm \sqrt{L(L-4f')}}{2}$$

$$\boxed{p_1 = \frac{-L - \sqrt{L(L-4f')}}{2}} \qquad \boxed{p_2 = \frac{-L + \sqrt{L(L-4f')}}{2}}$$

2)b) $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p+L}{p} = 1 + \frac{L}{p}$

$$\gamma = 1 + \frac{L}{\frac{-L \pm \sqrt{L(L-4f')}}{2}} = 1 + \frac{2}{-1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{f'}{L}}}$$

On s'intéresse au cas $|\gamma| > 1$, c'est-à-dire $\gamma < -1$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 1 + \frac{2}{-1 + \sqrt{1 - 4\frac{f'}{L}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = -17{,}3}$$

2)c) $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ $\Rightarrow |\gamma| = \frac{e'}{e}$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{e'}{|\gamma|} = 0{,}57 \text{ mm}} \simeq 0{,}58 \text{ mm (cf 1)b))}$$

⇒ cohérent.