

* Banque filière PT *

Epreuve de Sciences Industrielles I

Durée 5 h

Remarques importantes Cette épreuve comprend quatre parties sensiblement indépendantes. L'importance respective des parties est précisée dans l'introduction du sujet.

Dans les applications numériques, des simplifications tenant compte des ordres de grandeur relatifs peuvent être effectuées à condition de les justifier.

Convention de notations Par souci de précision, on note, en l'absence d'indication complémentaire :

- $(P; \vec{u})$ l'axe passant par le point P , et de direction \vec{u} (vecteur unitaire), ce qui permet de noter $(Q; \vec{u})$ l'axe de même direction qui passe par un point différent Q ,
- $(P; \vec{u}, \vec{v})$ le plan passant par P et contenant les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,
- $(P; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le trièdre d'origine P ,
- \mathcal{T}_{ij} le torseur des actions mécaniques du solide S_i sur le solide S_j , ayant pour composantes :

$$\mathcal{T}_{ij} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_i/S_j) \\ \vec{M}(D, S_i/S_j) \end{array} \right\}_D$$

où $\vec{R}(S_i/S_j)$ désigne la résultante des efforts et $\vec{M}(D, S_i/S_j)$, le moment des efforts au point D ,

- \mathcal{V}_{ij} le torseur cinématique du solide S_i dans son mouvement par rapport au solide S_j , ayant pour composantes :

$$\mathcal{V}_{ij} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(D, S_i/S_j) \end{array} \right\}_D$$

où $\vec{\Omega}(S_i/S_j)$ désigne le taux de rotation de S_i dans son mouvement par rapport à S_j et $\vec{V}(D, S_i/S_j)$, la vitesse de D dans le mouvement de S_i par rapport à S_j .

- La transformée de Laplace d'une fonction scalaire f de la variable temporelle t est notée F de la variable complexe p associée à la transformée. Par convention, la fonction temporelle est représentée par une lettre minuscule et sa transformée de Laplace par la même lettre en majuscule.
- Pour un système, de fonction de transfert F , la réponse en fréquence (ou réponse harmonique) est notée $F(j\omega)$. Le module de $F(j\omega)$ est noté $|F(j\omega)|$.

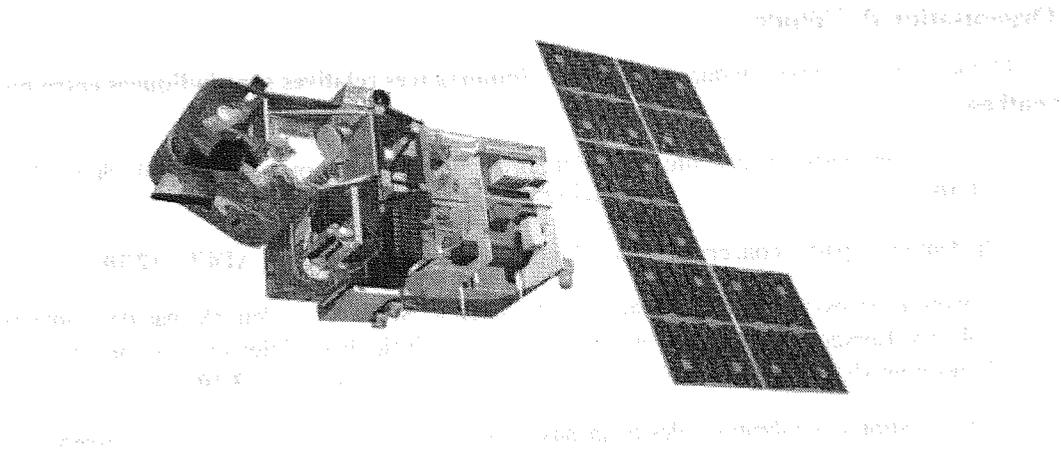


FIG. 1 – Vue générale de SPOT 4

Présentation et contexte

Le satellite d'observation de la Terre SPOT 4, conçu par le CNES, est opérationnel depuis 1998. Il complète la famille SPOT en élargissant sa mission pour permettre de mieux répondre aux besoins des utilisateurs d'images spatiales.

Architecture générale

L'architecture générale du satellite se décompose en deux parties principales :

- la plate-forme,
- la charge utile.

La plate-forme

Elle assure les fonctions :

- d'interface avec le lanceur (Ariane 4),
- de génération et stockage de l'énergie,
- de contrôle de l'attitude du satellite (orientation dans l'espace) et de son orbite (position dans l'espace),
- de gestion des informations recueillies sur l'état de tous les sous-ensembles au moyen d'une intelligence embarquée, le logiciel de vol,
- de liaison avec le sol pour le suivi (télémétrie), le contrôle (télécommande) et la localisation par le sol,
- d'embarquement des charges utiles sur un "marbre optique" qui leur assure une grande stabilité de positionnement.

La charge utile

La charge utile correspond aux équipements embarqués pour assurer la mission principale ; elle est constituée d'une structure en treillis de fibres de carbone et de deux instruments de prise de vues de type HRVIR, pour Haute Résolution Visible et InfraRouge.

Organisation de l'étude

L'étude sera découpée en quatre parties (**les importances relatives sont indiquées entre parenthèses**) :

- la première partie est constituée par l'étude de l'orbite opérationnelle nominale du satellite (1/10),
- la deuxième partie concerne l'étude d'une articulation particulière : ADELE (2/10),
- l'énergie nécessaire au fonctionnement du satellite SPOT 4 est délivrée par des capteurs solaires. Lorsque le satellite occupe sa position nominale, le déploiement des panneaux solaires peut s'effectuer. Cette étude fera l'objet de la troisième partie (3/10),
- l'atténuation des vibrations des panneaux solaires du satellite par une boucle d'asservissement fera l'objet de la quatrième partie (4/10).

1 Orbite nominale de SPOT 4

Pour satisfaire à sa mission de prise d'images terrestres, SPOT 4 est placé sur une orbite qui possède les caractéristiques suivantes :

- l'orbite est "**phasée**" c'est à dire que le satellite passe au-dessus d'un point du sol au bout d'un nombre entier de jours. SPOT observe une zone donnée tous les 26 jours. Durant ces 26 jours, il effectue un nombre entier de révolutions (369) : le satellite effectue donc $14 + 5/26$ révolutions par jour,
- l'orbite est **héliosynchrone**, c'est à dire que l'angle entre le plan de l'orbite et la direction du soleil est constante,
- l'orbite est **polaire**. Ceci permet une couverture totale de la surface de la terre,
- l'orbite est quasi-**circulaire**. Cette propriété permet de maintenir une altitude constante par rapport à la surface de la Terre.

L'orbite du satellite est définie par la vitesse initiale que lui communique le lanceur Ariane, puis par les petites corrections effectuées régulièrement à l'aide de micropropulseurs.

La caractérisation de cette orbite fera l'objet de cette première partie.

Modélisation et paramétrage

La Terre est modélisée par un astre à symétrie sphérique de masse M_t , de rayon R_t de centre O fixé à l'origine d'un référentiel galiléen de repère $R_g(O; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le satellite P est modélisé par une masse ponctuelle m se déplaçant sur une orbite circulaire de centre O dans le plan (\vec{x}_g, \vec{y}_g) à une hauteur h de la surface de la Terre (Fig. 2).

Calcul de l'orbite

1.1 On rappelle que deux corps massifs S et S' de masse m et m' exercent l'un sur l'autre une force d'attraction définie par :

$$\vec{f}_{S/S'} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

avec :

- G : constante de gravitation universelle,

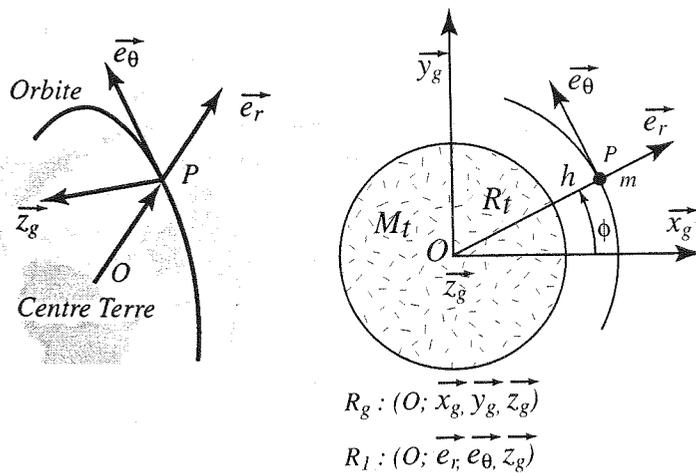


FIG. 2 – paramétrage

- r : distance entre les centres de gravité des deux corps,
- \vec{u} : vecteur unitaire de la droite reliant les centres de gravité, orienté de S vers S' .

Donner la résultante des actions mécaniques exercées par la Terre sur le satellite $\vec{R}(T/P)$.

- 1.2 Donner la vitesse $\vec{V}(P/R_g)$ puis l'accélération $\vec{\Gamma}(P/R_g)$ du satellite dans son mouvement par rapport à R_g .
 - 1.3 En précisant toutes les hypothèses, écrire le principe fondamental de la dynamique au point matériel P . En déduire que la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ du repère R_l par rapport au repère R_g est constante ; elle sera notée Ω_0 . Donner l'expression de h en fonction de Ω_0 , G , M_t , R_t .
 - 1.4 Donner la période T_0 de révolution du satellite P autour de $(O; \vec{z}_g)$. En déduire la vitesse angulaire Ω_0 .
 - 1.5 En déduire la valeur de l'altitude h du satellite par rapport à la Terre.
- Application numérique : $R_t = 6400$ km, $M_t = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

Déploiement des panneaux solaires de SPOT 4

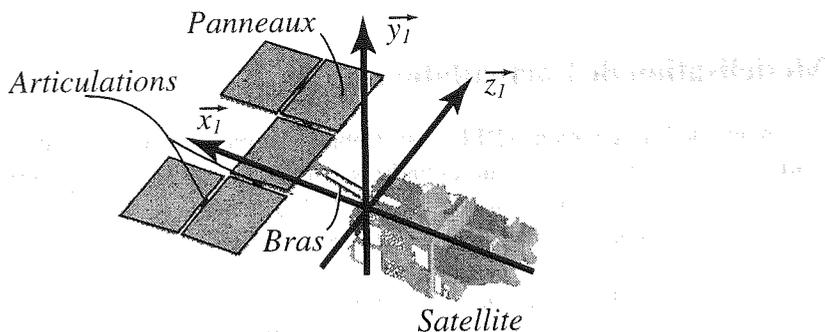


FIG. 3 – Satellite SPOT 4 en configuration déployée

L'énergie nécessaire au fonctionnement du satellite SPOT 4 est délivrée par des capteurs solaires. Le système support des capteurs solaires est constitué d'un bras et de cinq panneaux rigides articulés qui sont repliés sur eux-même pendant le lancement puis qui vont se déployer en U en orbite (Fig. 3). Ce déploiement des panneaux n'est pas régulé. Le bras et les cinq panneaux sont liés par des articulations appelées ADELE. La caractérisation de ce type d'articulation fera l'objet de la partie 2. Les six articulations comportent la motorisation nécessaire au déploiement. Cette motorisation est passive (pas de moteur) et est assurée par une lame élastique préalablement déformée. A la fin de l'ouverture un dispositif anti-retour bloque l'articulation dans la position finale souhaitée.

Le déploiement en orbite se déroule en deux phases :

- Le déploiement primaire est obtenu en déplaçant l'ensemble des panneaux hors du corps de satellite à l'aide d'un bras. Ce mouvement s'effectue dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) (Fig. 4).
- Le déploiement secondaire s'effectue alors et les cinq panneaux se déploient en un mouvement spatial. Ce déploiement ne fait pas partie de l'étude.

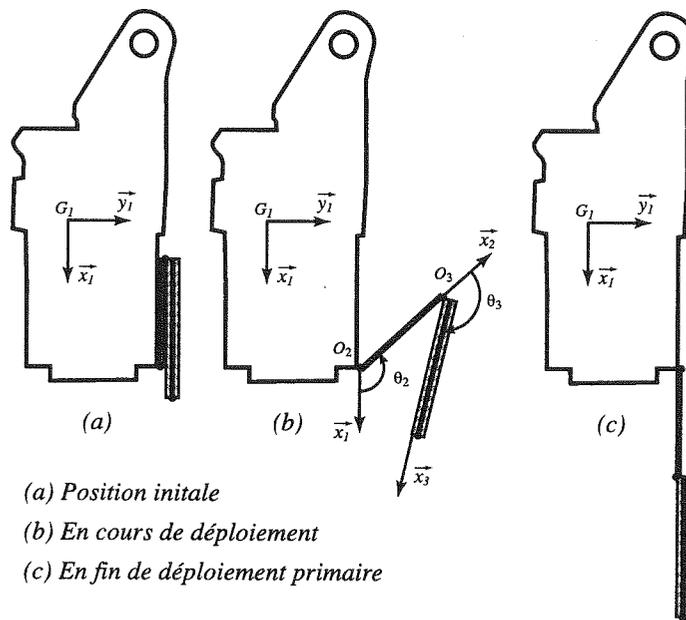


FIG. 4 – Déploiement primaire

2 Modélisation de l'articulation ADELE

Le principe de l'articulation ADELE est d'obtenir le mouvement de rotation entre deux panneaux articulés par le roulement d'un cylindre sur un autre, chacun des cylindres étant solidaire d'un des panneaux. Les cylindres sont de rayon R . L'articulation comporte également une lame élastique pour la motorisation passive et un câble de maintien du contact en I (Fig. 5).

- 2.1 Ecrire la condition de contact entre les solides S_1 et S_2 en fonction de R . Calculer la vitesse du point C_2 par rapport au solide S_1 , notée $\vec{V}(C_2/R_1)$.
- 2.2 Donner l'expression du torseur cinématique, noté \mathcal{V}_{21} du mouvement de S_2 par rapport à S_1 au point C_2 .

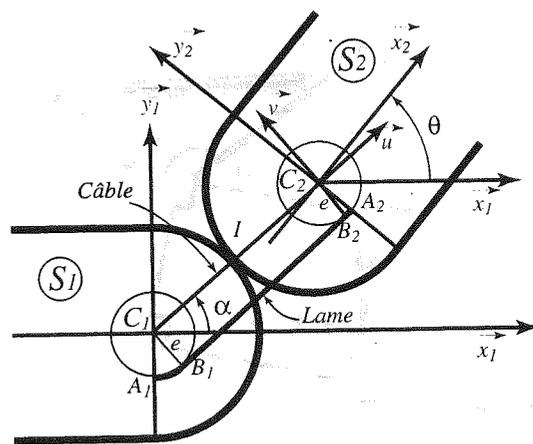


FIG. 5 – Modélisation de l'articulation ADELE

2.3 En exprimant la condition de roulement sans glissement en I , donner une relation entre les vitesses angulaires $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$. On suppose que $\alpha(0) = \theta(0) = 0$. En déduire une relation entre α et θ .

2.4 On suppose la condition de roulement sans glissement réalisée. La lame élastique est fixée en A_1 et A_2 et s'enroule sur un cylindre de rayon e sur chacun des corps S_1 et S_2 . La longueur L_0 de la lame non contrainte est $2R$, son épaisseur est négligeable devant e (Fig. 5). Exprimer la longueur $L(A_1B_1B_2A_2)$ pour une position α courante.

On note ϵ la déformation de la lame avec :

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Montrer que la déformation ϵ est une fonction linéaire de α .

Donner une condition sur le rapport e/R pour que la déformation relative ϵ soit inférieure à ϵ_0 ($\epsilon_0 = 0,01$).

2.5 L'effort exercé par la lame sur S_1 est noté $\vec{F}_{L/1}$ avec :

$$\vec{F}_{L/1} = K_L \epsilon \vec{u}$$

avec K_L une constante dépendant des caractéristiques géométriques et matériau de la lame.

Soit \mathcal{T}_{L2} le torseur d'action de la lame, notée S_L , sur S_2 :

$$\mathcal{T}_{L2} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_L/S_2) \\ \vec{C}(I, S_L/S_2) \end{array} \right\}_I$$

Montrer que $\vec{C}(I, S_L/S_2) = -k_L \theta \vec{z}_1$ avec k_L une constante que l'on exprimera en fonction de K_L et des caractéristiques géométriques.

2.6 Donner une condition sur les dimensions pour que cette liaison puisse être considérée, en première approximation, comme une liaison pivot.

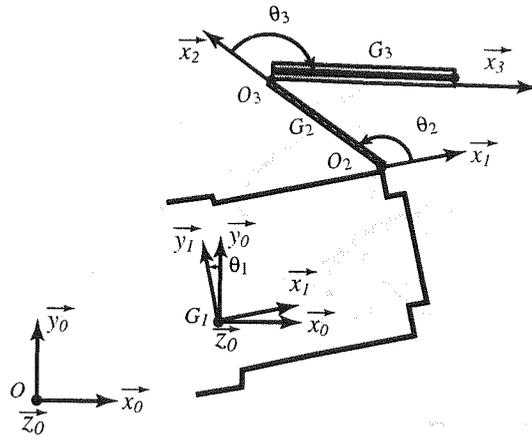


FIG. 6 – paramétrage

3 Déploiement primaire des panneaux solaires

Notations et paramétrage

L'ensemble est modélisé par trois solides, supposés indéformables, en mouvement plan par rapport à un repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: le corps du satellite noté (S_1) de repère $R_1(G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec \vec{z}_1 confondu avec \vec{z}_0 , le bras noté (S_2) de repère $R_2(O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ et l'ensemble des cinq panneaux noté (S_3) de repère $R_3(O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$. Le bras (S_2) est en liaison pivot d'axe ($O_2; \vec{z}_1$) avec (S_1), le bloc panneaux (S_3) est en liaison pivot d'axe ($O_3; \vec{z}_1$) avec le bras. On note G_1, G_2, G_3 les centres de gravité respectivement de (S_1) de (S_2) et de (S_3). Le corps de satellite (S_1) a une masse m_1 et un moment d'inertie par rapport à ($G_1; \vec{z}_1$) noté I_1 ; le bras a une masse notée m_2 et un moment d'inertie par rapport à ($G_2; \vec{z}_1$), noté I_2 ; le bloc panneaux a une masse notée m_3 et un moment d'inertie par rapport à ($G_3; \vec{z}_1$), noté I_3 . Les positions des principaux points et paramètres angulaires sont données par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G_1 O_2} &= a\vec{x}_1 + by_1 & \widehat{(\vec{x}_0, \vec{x}_1)} &= \theta_1 \\ \overrightarrow{O_2 G_2} &= d_2\vec{x}_2 & \widehat{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} &= \theta_2 \\ \overrightarrow{O_2 O_3} &= l_2\vec{x}_2 & \widehat{(\vec{x}_2, \vec{x}_3)} &= \theta_3 \\ \overrightarrow{O_3 G_3} &= d_3\vec{x}_3 \end{aligned}$$

Caractéristiques numériques des solides S_i

	Solide 1	Solide 2	Solide 3
Longueur a (m)	2,5		
Longueur b (m)	1		
Longueur l_i (m)		1,7	3
Position de $G_i; d_i$ (m)		1	1,4
masse m_i (kg)	2600	6	270
Inertie I_i (kg.m ²)	6300	182	405

Efforts appliqués Une lame déformable exerce à l'intérieur de chaque articulation une action mécanique de sorte que les torseurs de liaisons

– de S_1 sur S_2 soit modélisable par :

$$\mathcal{T}_{12} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1/S_2) \\ \vec{C}(O_2, S_1/S_2) \end{array} \right\}_{O_2}$$

avec $\vec{C}(O_2, S_1/S_2) \cdot \vec{z}_1 = -k_1(\theta_2 - \theta_{20})$

– de S_2 sur S_3 soit modélisable par :

$$\mathcal{T}_{23} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_2/S_3) \\ \vec{C}(O_3, S_2/S_3) \end{array} \right\}_{O_3}$$

avec $\vec{C}(O_3, S_2/S_3) \cdot \vec{z}_1 = -k_2(\theta_3 - \theta_{30})$

avec θ_{20} et θ_{30} des constantes de prédéformation des articulations. Elles seront prises nulles dans la suite de l'étude.

Caractéristiques numériques des articulations

	Articulation 1	Articulation 2
Raideur $k_i (Nm/rad)$	0,25	0,25
Prédéformation $\theta_{i0} (rad)$	0	0

3.1 Position du centre d'inertie

On appelle G le centre d'inertie de l'ensemble $\{(S_1), (S_2), (S_3)\}$. On cherche à montrer que la position de G , lorsque θ_2 et θ_3 varient, reste très proche de celle de G_1 (Fig. 6).

3.1.a Ecrire la relation vectorielle donnant la position de G dans le repère R_1 en fonction de m_1, m_2, m_3 , des paramètres de position et des grandeurs géométriques. On pourra noter $m = m_1 + m_2 + m_3$.

3.1.b En supposant $m_2 \ll m_1$ et $m_3 \ll m_1$, en déduire que l'on peut confondre G et G_1 au premier ordre. Cette hypothèse simplificatrice sera faite dans toute la suite du problème.

Essai de déploiement au sol

Afin de qualifier la structure, de nombreux essais sont effectués au sol en laboratoire. Cette étude préliminaire portera sur le déploiement primaire dans le référentiel R_0 , lié au laboratoire et supposé galiléen. L'ensemble satellite-bras-panneaux est placé sur une table à coussin d'air de normale \vec{z}_0 verticale ascendante confondue avec \vec{z}_1 réalisant une liaison appui-plan parfaite.

3.2 Déploiement du bras au sol

Dans cette partie, on suppose que le déploiement du bras se fait préalablement au déploiement du bloc panneaux : $\theta_2 \in [0, \pi]$, $\theta_3 = -\pi$. L'ensemble $\{(S_2), (S_3)\}$ est considéré comme un solide indéformable (S_{23}) . On notera m_{23} sa masse, G_{23} son centre de gravité, I_{23} le moment d'inertie par rapport à $(G_{23}; \vec{z}_1)$.

3.2.a Donner la position d_{23} de G_{23} dans R_2 et la valeur de I_{23} en fonction des caractéristiques de (S_2) et de (S_3) .

3.2.b A l'instant initial ($t = 0$), l'ensemble $\{(S_1), (S_{23})\}$ est immobile par rapport à R_0 . Justifier, en précisant les hypothèses nécessaires, que le point G reste immobile, pendant le déploiement, par rapport au référentiel galiléen lié à la Terre. En déduire que le point G_1 peut alors être considéré comme pratiquement fixe par rapport à R_0 et sera pris comme origine O de ce repère. Cette hypothèse sera faite pour toute la suite de l'étude.

3.2.c Après avoir isolé (S_1) , écrire le théorème du moment dynamique en O_2 . En déduire une équation scalaire de mouvement.

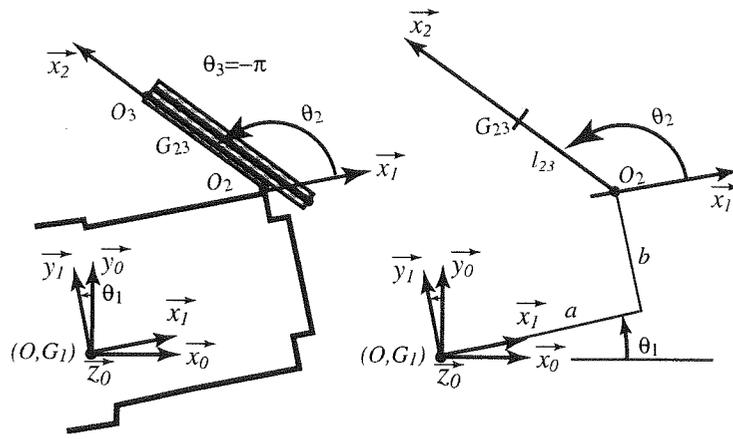


FIG. 7 – paramétrage déploiement du bras

- 3.2.d Après avoir isolé $\{(S_1), (S_{23})\}$, écrire le théorème du moment dynamique en O_2 . En déduire une équation scalaire de mouvement. Comment évolue le moment cinétique de l'ensemble isolé au cours du déploiement ?
- 3.2.e **Hypothèse pour la résolution :** L'effet de m_{23} est négligeable devant I_{23} : on supposera $m_{23} = 0$. Montrer que les équations de mouvement se ramènent à un système différentiel du second ordre à coefficients constants. Résoudre le système et donner l'expression de $\theta_1(t)$ et de $\theta_2(t)$ en fonction des caractéristiques cinétiques du système. Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= 0 & \dot{\theta}_1(t=0) &= 0 \\ \theta_2(t=0) &= \pi & \dot{\theta}_2(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

On note t_1 , l'instant pour lequel le solide S_{23} arrive en butée avec le solide S_1 : $\theta_2(t_1) = 0$. Donner la valeur de $\theta_1(t_1)$ et $\dot{\theta}_2(t_1)$ au moment du choc.

- 3.2.f On suppose que pour l'angle $\theta_2(t_1) = 0$, un dispositif d'accrochage rend solidaire les deux solides $\{(S_1), (S_{23})\}$. L'ensemble se comporte alors comme un solide noté $\{(S_{123})\}$. En tenant compte de l'évolution du moment cinétique de $\{(S_1), (S_{23})\}$ (c.f. 3.2.d) et en tenant compte des conditions initiales (c.f. 3.2.b), donner l'évolution du mouvement de $\{(S_{123})\}$ par rapport à R_0 pour $t > t_1$.
- 3.2.g Après avoir écrit le théorème de l'énergie cinétique relatif à l'ensemble $\{(S_1), (S_{23})\}$ dans son mouvement par rapport à R_0 entre les instants $t = 0$ et $t > t_1$, qualifier la nature du choc à l'instant t_1 .

3.3 Déploiement du bras en orbite

On suppose que le déploiement du bras s'effectue en orbite. Avant déploiement, le centre d'inertie G du satellite décrit l'orbite circulaire nominale à une altitude h constante (c.f. partie 1). Le mouvement est plan et le vecteur \vec{x}_1 est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens opposé au mouvement (Fig. 8). On suppose toutes les dimensions du satellite petites par rapport à h (le champ de pesanteur est localement homogène) et les masses négligeables à l'exception de m_1 .

Ecrire les équations du mouvement. Commenter par rapport à la situation au sol.

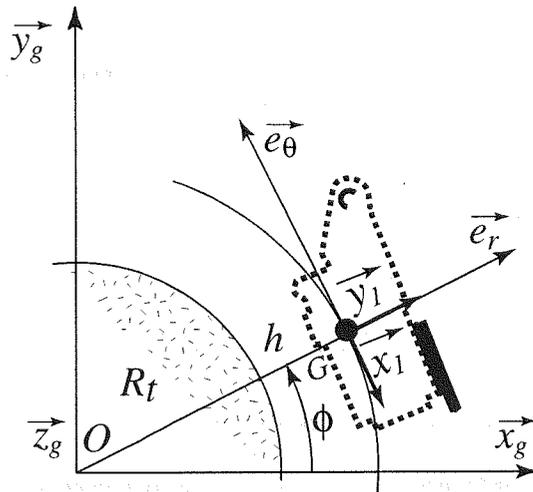


FIG. 8 – déploiement en orbite

3.4 Déploiement simultané du bras et des panneaux au sol

En réalité, le bras et le bloc panneau se déploient simultanément. L'étude concerne ce déploiement dans le repère R_0 lié au laboratoire et supposé galiléen. Le centre d'inertie G_1 de (S_1) est considéré comme fixe dans R_0 .

3.4.a Expliciter la démarche permettant d'aboutir de façon rapide et sûre aux équations différentielles du mouvement du système.

3.4.b Ecrire les équations scalaires du mouvement des solides (S_1) , (S_2) , (S_3) par rapport à R_0 . La résolution n'est pas demandée.

Le bras a en réalité un comportement de corps déformable dans la phase qui suit le déploiement : Le choc de fin de course induit des vibrations qui ne s'amortissent que très lentement. L'objet de l'étude est de présenter une solution pour atténuer rapidement les vibrations parasites.

3.5 Vibration libre du bras en fin de déploiement

Le solide (S_1) est fixe par rapport à R_0 repère lié au laboratoire et supposé galiléen. La normale \vec{z}_0 verticale ascendante est confondue avec \vec{z}_1 . Une première modélisation consiste à remplacer l'ensemble des panneaux par une masse ponctuelle $M = m_3$ en O_3 (Fig. 9-a et 9-b).

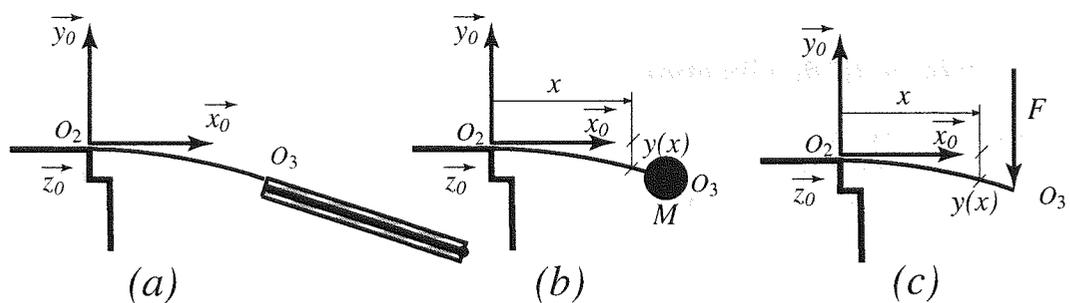


FIG. 9 – Vibration du bras

On suppose que :

- la déformée dynamique du bras se confond en première approximation avec la déformée statique (Fig. 9-c) :

$$y(x, t) = \frac{(3l_2 - x)x^2}{2l_2^3} v(t)$$

avec $v(t)$ le déplacement en M ,

- la poutre se comporte comme un ressort linéaire :

$$F(t) = k_{f_0} v(t) \quad \text{avec} \quad k_{f_0} = \frac{3EI_z}{l_2^3}$$

avec E le module d'Young et I_z l'inertie de section.

- 3.5.a Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M . En déduire l'équation du mouvement $v(t)$ de M . On prendra comme conditions initiales $v(0) = 0$ et $\dot{v}(0) = v_0$. En déduire l'équation de mouvement $y(x, t)$ du bras.

On appelle courbure de la poutre $\chi(x, t)$ l'inverse du rayon de courbure avec $\chi(x, t) \approx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$.

Montrer que $\chi(x_0, t)$ est proportionnel à $v(t)$ pour x_0 fixé. Donner le coefficient de proportionnalité k_{c_0} pour $x_0 = 0$.

$$\chi(x_0, t) = k_{c_0} v(t) \quad (2)$$

- 3.5.b Lors des essais de déploiement au sol, il s'avère que le système est très faiblement amorti. Ainsi, l'équation du mouvement $v(t)$ de M est identifiée comme :

$$\ddot{v}(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{v}(t) + \omega_1^2 v(t) = 0$$

ξ_1 est le coefficient d'amortissement ($0 < \xi_1 \ll 1$). Donner l'expression de la réponse libre de $v(t)$ pour $v(0) = 0$ et $\dot{v}(0) = v_0$. Tracer l'allure de la réponse. Une table des transformées de Laplace est donnée en annexe.

- 3.5.c Application numérique : pour $\omega_1 = 130 \text{ rad/s}$ et $\xi_1 = 0,005$, déterminer t_{max} , le temps pour lequel $v(t)$ atteint sa valeur maximale $v(t_{max})$. Ensuite, calculer la valeur approximative du temps t_r tel que pour tout t supérieur à t_r ,

$$|v(t)| \leq \frac{v(t_{max})}{100}$$

Montrer ainsi que t_r dépend essentiellement de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique en p .

4 Contrôle actif de vibrations

Les vibrations du bras peuvent causer des endommagements à la structure et risquent ainsi de réduire la durée de vie du satellite. Une étude a été effectuée pour évaluer les performances d'un amortissement actif des vibrations. On se propose ici d'examiner quelques aspects de cette étude qui mettent en évidence les particularités d'un système très faiblement amorti.

Le principe du contrôle actif des vibrations est de construire un système bouclé : un capteur permet de mesurer les effets des vibrations et un actionneur commandé agit en contre-réaction pour les atténuer. Pour notre application, des capteurs et actionneurs piézo-électriques sont utilisés. Les matériaux piézo-électriques présentent la particularité de développer des tensions électriques une fois soumis à des contraintes et déformations (effet direct). De même, des contraintes et des

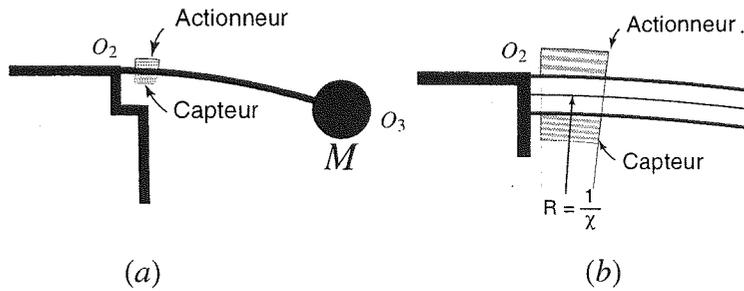


FIG. 10 – Dispositif de contrôle du bras

déformations apparaissent quand ce matériau est polarisé par l'application d'un champ électrique (effet inverse). Le capteur et l'actionneur piézo-électriques sont placés comme le montre la figure 10, ils sont solidaires du bras et leur masse est négligeable comparé à la masse de la structure.

Les vibrations du bras créent une tension électrique aux bornes du capteur proportionnelle à la courbure $\chi(x_0, t)$ et donc à $v(t)$ (c.f. équation 2). L'actionneur est alimenté par un amplificateur de gain $A = 250$ et produit un moment de flexion en fonction de la tension appliquée. Le schéma bloc du système est donné figure 11.

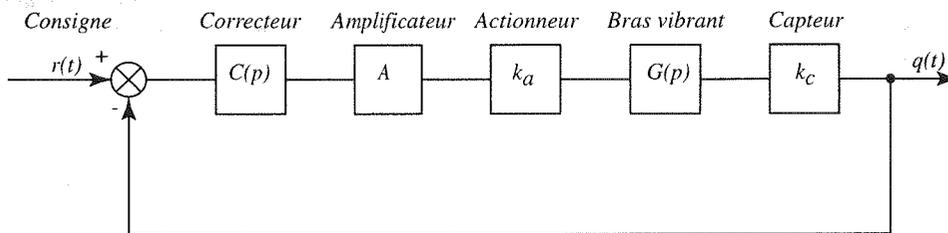


FIG. 11 – Schéma bloc du système

$$\text{Avec } \begin{cases} \text{gain de l'actionneur} & k_a = 1,85 \cdot 10^{-3} \text{ N.m/V} \\ \text{gain du capteur} & k_c = 6,77 \cdot 10^5 \text{ V/m} \end{cases}$$

La fonction de transfert, limitée au premier mode, du bras vibrant est donnée par :

$$G(p) = \frac{a}{p^2 + bp + c}$$

$$\text{avec } a = 2,05 \cdot 10^{-3} \text{ N}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad b = 1,3 \text{ s}^{-1} \quad c = 1,69 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}$$

4.1 Analyse du système

4.1.a Pour $C(p) = 1$, donner la fonction de transfert du système en boucle ouverte, notée $H_0(p)$, et faire l'application numérique. Préciser la valeur de la consigne $r(t)$.

4.1.b Pour $H_0(p)$, donner les valeurs de la pulsation propre, notée ω_0 , du coefficient d'amortissement, noté ξ_0 et du gain statique, noté k_0 .

4.2 Système du second ordre faiblement amorti

On considère un système élémentaire du second ordre décrit par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} \quad \text{avec } 0 < \xi \ll 1$$

On cherche à établir quelques résultats utiles pour la suite du problème.

- 4.2.a Donner l'expression du module et de l'argument de la réponse en fréquence $H(j\omega)$.
- 4.2.b Montrer que le module de $H(j\omega)$ présente un maximum pour $\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$.
- 4.2.c Déterminer l'expression de $|H(j\omega)|_{\omega_{max}}$ et montrer ainsi qu'elle est indépendante de ω_n .
- 4.2.d Donner la valeur numérique approchée de l'argument de $H(j\omega)$ à $\omega = \omega_{max}$ ($0 < \xi \ll 1$).

4.3 Réponse en fréquence

- 4.3.a Tracer sur la copie le diagramme asymptotique de Bode en gain et en phase de $H_0(j\omega)$. Donner l'allure des courbes réelles.
- 4.3.b Donner la valeur de ω_{max} (pulsation pour laquelle la courbe de module présente un maximum) et calculer $|H_0(j\omega)|_{\omega_{max}}$.
- 4.3.c Déterminer la marge de gain et calculer la marge de phase.
- 4.3.d La figure 12 donne la réponse en fréquence de $H_0(j\omega)$ dans le plan de Nyquist. Que représente chacun des axes?
- 4.3.e Retracer sur la copie l'allure de la figure 12 en précisant le sens des pulsations croissantes et la position de ω_{max} . En déduire un moyen simple pour déterminer la valeur du coefficient d'amortissement.

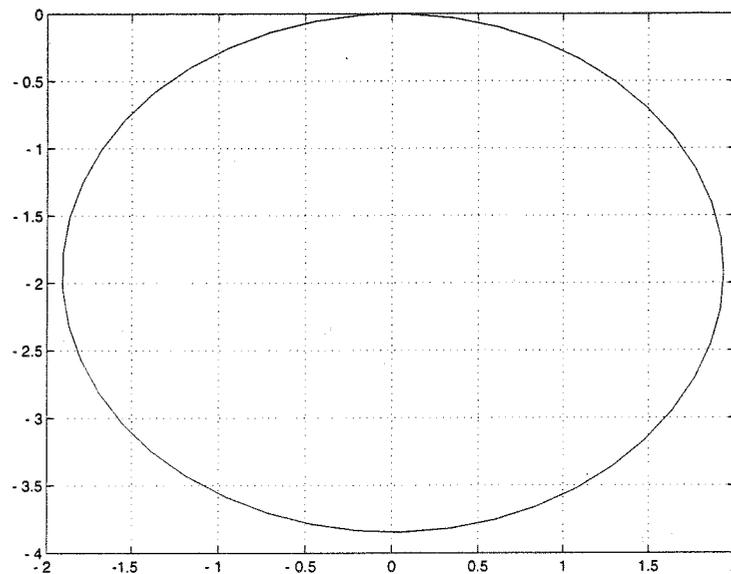


FIG. 12 – Réponse en fréquence (plan de Nyquist)

4.4 Correcteur proportionnel

Soit $C(p) = K$ avec $K > 0$

- 4.4.a Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée du système de la figure 11 sous la forme :

$$\frac{Q(p)}{R(p)} = \frac{k_f}{\frac{1}{\omega_f^2} p^2 + \frac{2\xi_f}{\omega_f} p + 1}$$

et donner les relations entre ω_f, ξ_f et ω_0, ξ_0 respectivement en fonction de K et k_0 .

- 4.4.b Pour la réponse libre ($r(t) = 0$), écrire l'équation caractéristique du système en p . Donner l'expression de la partie réelle des racines et comparer aux résultats obtenus en 3.5.c.
- 4.4.c Conclure sur l'efficacité du correcteur proportionnel dans ce cas.

4.5 Correcteur proportionnel et intégral (P.I.)

Soit $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$; ($K_i > 0$, $T_i > 0$)

- 4.5.a Tracer les diagrammes asymptotiques en module et phase de $C(j\omega)$ dans le plan de Bode pour $K_i < 1$.
- 4.5.b Afin d'augmenter la marge de phase, le correcteur P.I. est utilisé comme un atténuateur à haute fréquence. Pour $\frac{1}{T_i} < \omega_0$, calculer la valeur de K_i , notée \hat{K}_i , pour avoir :

$$|C(j\omega)H_0(j\omega)| \approx -6dB \text{ à } \omega = \omega_{max}.$$

- 4.5.c Pour $K_i = \hat{K}_i$, les performances du système sont comparées pour deux valeurs de T_i : $T_i = 0,1 \text{ s}$ et $T_i = 0,01 \text{ s}$. Pour chaque cas, calculer la pulsation de gain unité ω_u (pulsation pour laquelle $|C(j\omega)H_0(j\omega)| = 1$). En déduire les marges respectives de phase.
- 4.5.d Quelle valeur de T_i faut-il retenir? Justifier votre réponse.

4.6 Correction par déphasage positif

Soit $C(p) = \frac{0,05(1+p)}{1+0,005p}$. La figure 13 montre la réponse en fréquence ($C(j\omega)H_0(j\omega)$) dans le plan de Black.

- 4.6.a Déterminer graphiquement (fig. 13) les marges de gain et de phase avec ce correcteur et estimer la valeur de $|C(j\omega)H_0(j\omega)|$ pour $\omega = \omega_{max}$.
- 4.6.b Ecrire l'équation caractéristique du système asservi dans ce cas.
- 4.6.c Application numérique : on montre que l'équation caractéristique possède une racine réelle à $p = -176,44$ et deux racines complexes conjuguées. Déterminer la partie réelle de ces deux racines et conclure sur l'efficacité de ce correcteur.

REPONSE EN FREQUENCE PLAN DE BLACK

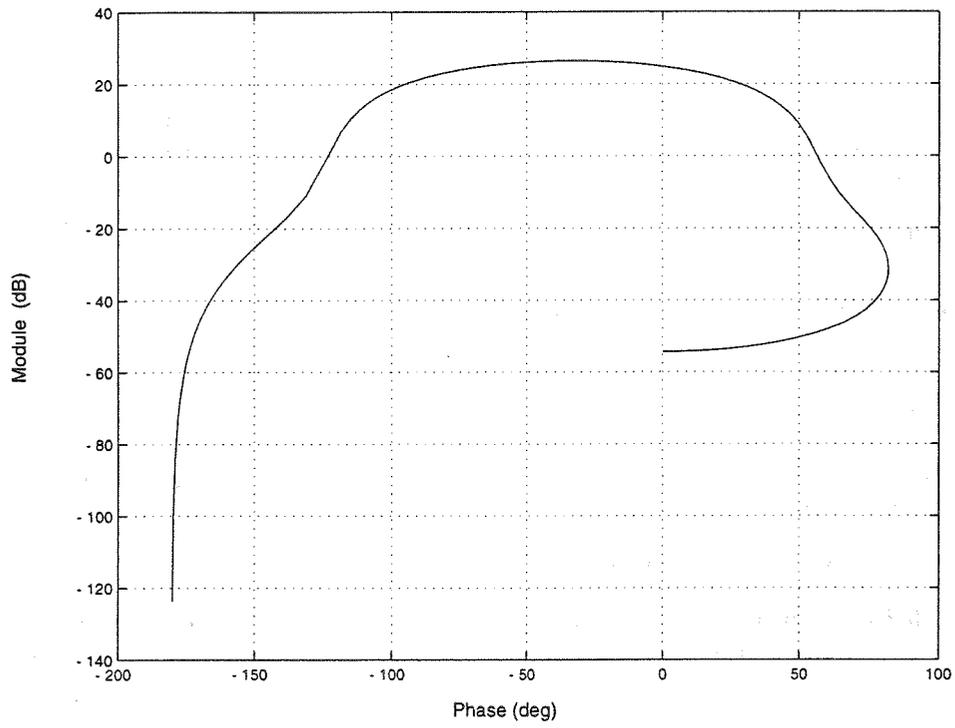


FIG. 13 – *Diagramme de Black*

Annexe

Transformée de Laplace

Définition

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Notation

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Principales propriétés

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = F(p)e^{-\tau p}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(p + a)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = p^2F(p) - pf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\} = F(p)G(p)$$

Table des transformées

$f(t)(t \geq 0)$	$F(p)$	$f(t)(t \geq 0)$	$F(p)$
$\delta(t)$ (impulsion)	1	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$u(t)$ (échelon)	$\frac{1}{p}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p + a}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p}{(p + a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$