

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

 Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Introduction

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des \mathbb{R} -espaces vectoriels. On appelle **algèbre** tout \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{A} qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall c \in \mathbb{A}, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca$$

ainsi que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}_{\mathbb{A}}$ et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \quad a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite **commutative**. La **dimension** d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une **sous-algèbre** de \mathbb{A} est un sous-ensemble non vide de \mathbb{A} qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que \mathbb{A} . Pour que \mathbb{B} soit une sous-algèbre de \mathbb{A} , il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de \mathbb{A} , qu'il contienne $\mathbf{1}$ et que :

$$\forall b \in \mathbb{B}, \forall b' \in \mathbb{B}, \quad bb' \in \mathbb{B}$$

On appelle **morphisme d'algèbre** entre deux algèbres \mathbb{A} et \mathbb{B} , toute application linéaire f de \mathbb{A} dans \mathbb{B} qui vérifie en plus :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall a' \in \mathbb{A}, \quad f(aa') = f(a)f(a') \quad \text{et} \quad f(\mathbf{1}_{\mathbb{A}}) = \mathbf{1}_{\mathbb{B}}$$

Tournez la page S.V.P

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé **isomorphisme** d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n . La **trace** d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A . Une matrice **scalaire** est une matrice de la forme λI_n , où λ est un réel. Une matrice **diagonale** est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

I. Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que :

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

2. Soit A une matrice non scalaire ; on note \mathbb{A} l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que \mathbb{A} est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que \mathbb{A} contient une matrice B telle que

$$B^2 = -I_2 \text{ si, et seulement si, } (\text{tr } A)^2 < 4 \det A$$

4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de \mathbb{A} et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre \mathbb{A} et le corps \mathbb{C} des nombres complexes.
5. On suppose que A est non scalaire et vérifie :

$$(\text{tr } A)^2 = 4 \det A$$

Déterminer toutes les matrices de \mathbb{A} telles que $M^2 = 0$, et en déduire que \mathbb{A} n'est pas un corps.

6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre \mathbb{B} comme dans I.2. Démontrer que si A et B sont semblables, \mathbb{A} et \mathbb{B} sont des algèbres isomorphes.
7. On suppose que A est telle que :

$$(\text{tr } A)^2 > 4 \det A$$

Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que \mathbb{A} est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que \mathbb{A} est un corps ?

II. Quelques résultats généraux

Soit \mathbb{D} une algèbre de dimension finie n .

1. Soit a un élément de \mathbb{D} , démontrer que l'application ϕ_a définie par :

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{D} .

2. On note \mathcal{B} une base de \mathbb{D} .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme ϕ_a dans la base \mathcal{B} . Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a) \end{aligned}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que \mathbb{D} est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit \mathbb{C} , considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z)$.
4. Soit maintenant \mathbb{A} une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que \mathbb{A} est, ou n'est pas, un corps.

- (a) On suppose que \mathbb{A} contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ . Montrer que \mathbb{A} ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A .
- (b) En déduire que si \mathbb{A} contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.
- (c) On suppose que \mathbb{A} est **intègre**, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de \mathbb{A} , l'application $\phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme **de l'espace vectoriel** \mathbb{A} . En déduire que \mathbb{A} est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = 0 \quad (*)$$

1. Démontrer que n ne peut pas être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel \mathbb{H} engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

4. En déduire :

- (a) que les quatre matrices I_n, A, B et AB sont indépendantes et forment une base de \mathbb{H} ;
- (b) que \mathbb{H} est un corps.

5. On suppose **dans toute la suite du problème** que $n = 4$ et, en notant J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également $C = AB$.

- (a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition (*). On appellera donc \mathbb{H} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base (I_4, A, B, C) de \mathbb{H} sera notée \mathcal{B} .
- (b) Soit M une matrice non nulle de \mathbb{H} , vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$; quel lien y a-t-il entre M^{-1} et tM ?

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. On appelle **quaternion pur** un élément M de \mathbb{H} tel que $M = -{}^tM$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension trois et de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$. On le note \mathbb{L} . Est-ce une sous-algèbre de \mathbb{H} ?
2. On munit \mathbb{L} de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base \mathcal{C} soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments M et N de \mathbb{L} est noté $(M|N)$, la norme de M s'écrit $\|M\|$. Vérifier que :

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$$

3. Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.
4. Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de \mathbb{H} dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de ϕ à \mathbb{L} est un endomorphisme orthogonal.
5. Soient M et N deux quaternions purs. On veut démontrer que si M et N ont même norme, alors il existe $P \in \mathbb{H}$, non nulle, telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

- (a) Commencer par examiner le cas où M et N sont colinéaires.

(b) On suppose maintenant que M et N ne sont pas colinéaires. Vérifier que si M et N ont même norme :

$$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2(M - N)$$

et en déduire une matrice P non nulle telle que $MP = PN$.

6. Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec α réel et $Q \in \mathbb{L}$, Q est orthogonal à M et à N .

7. En déduire que tout isomorphisme d'algèbre ϕ de \mathbb{H} dans lui-même est défini par :

$$\phi(M) = P^{-1}MP$$

où P est un élément non nul de \mathbb{H} . On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de A et de B , et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent A invariante.

Fin de l'énoncé.