SESSION 1999

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC
MATHÉMATIQUES 2
DURÉE : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels. On désigne par $C([0,1])$ (resp. $C^1([0,1])$, …, $C^k([0,1])$, …) l'ensemble des applications continues (resp. de classe C^1, …, C^k, …) à valeurs réelles définies sur $[0,1]$.
On note : $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire habituel sur $C([0,1])$, et $\|\cdot\|_2$ la norme associée, définis respectivement pour tout $(f,g) \in C([0,1])^2$ par :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\,;\ \|f\|_2 = (f \mid f)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $a \geqslant 0$ un réel donné. Pour chaque réel k on désigne par $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des fonctions u de classe $C^2([0,1])$ qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} u'' + ku = 0 \\ aku(0) + u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

I Etude des solutions du problème (1)

Dans les deux premières questions on ne cherchera pas à expliciter les solutions de (1).

1. On désigne par $\mathbf{0}$ la fonction nulle de $C([0,1])$. Soit k un réel. Etablir que $\mathcal{E}(k)$ est un sous-espace vectoriel de $C^2([0,1])$ et que : $\mathcal{E}(0) = \{\mathbf{0}\}$.

2. Soit k un réel et soit u une fonction de $\mathcal{E}(k)$.

(a) Soit $f \in C^1([0,1])$. Etablir que : $(u' \mid f') = k\,(u \mid f) + aku(0)f(0) + u'(1)f(1)$.

(b) En déduire que : $k\,(u \mid u) + aku^2(0) = (u' \mid u')$, puis, que si $\mathcal{E}(k) \neq \{\mathbf{0}\}$ alors $k > 0$.

(c) Soit l un réel distinct de k et v une fonction de $\mathcal{E}(l)$. Montrer que : $(u' \mid v') = 0$.

3. On suppose pour cette question que : $a = 0$. Montrer que les réels k pour lesquels $\mathcal{E}(k)$ n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$ forment une suite croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de réels strictement positifs que l'on précisera. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on montrera que $\mathcal{E}(k_n)$ est de dimension 1 et on indiquera un de ses générateurs.

4. On suppose pour cette question que : $a > 0$.

(a) Soit k un réel. Montrer que si $\mathcal{E}(k) \neq 0$, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que la fonction :

$$u : x \in [0,1] \mapsto u(x) = \sin(\lambda(1-x))$$

soit dans $\mathcal{E}(k)$.

En déduire l'équivalence :

$$\{\mathcal{E}(k) \neq \{\mathbf{0}\}\} \Leftrightarrow \left\{\exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*}; k = \lambda^2 \text{ et } a\lambda\tan(\lambda) = 1\right\}$$

Montrer en particulier que si $\mathcal{E}(k)$ n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$, il est de dimension 1.

(b) Soit n un entier naturel. Etudier succinctement les variations de la fonction ϕ_n, à valeurs réelles, définie sur $D_n =]n\pi, (n+1)\pi[- \left\{n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\}$ par :

$$x \in D_n \mapsto \phi_n(x) = \tan(x) - \frac{1}{ax},$$

et en déduire que les solutions de l'équation $a\lambda\tan(\lambda) = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ forment une suite croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour chaque entier n, λ_n appartienne à l'intervalle : $]n\pi, n\pi + \pi/2[$.

(c) Déduire de ce qui précède que l'ensemble des réels k pour lesquels $\mathcal{E}(k)$ n'est pas réduit à $\mathbf{0}$ forment la suite croissante $(\lambda_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Etablir que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan(x) \geqslant x$. En déduire que :

$$\lambda_0^2 \leqslant \frac{1}{a},$$

puis que :

$$\forall n > 0 : n\pi \leqslant \lambda_n \leqslant n\pi + \frac{1}{an\pi}$$

(e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sin^2(\lambda_n) = \frac{1}{1 + a^2\lambda_n^2}$$

et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sin(2\lambda_n) = \frac{2a\lambda_n}{1 + a^2\lambda_n^2}$$

(f) En déduire que :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \frac{1}{a}$$

5. Dans cette question, on se place dans le cas général où $a \geqslant 0$ est *quelconque*. De manière à ne pas singulariser le cas $a = 0$ on désignera encore, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par λ_n, l'unique réel strictement positif tel que : $k_n = \lambda_n^2$, où k_n, a été déterminé à la question **3**.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit f_n une fonction engendrant le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}(\lambda_n^2)$ telle que $f_n(0)$ soit du signe de $(-1)^n$, et soit u_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$u_n = \frac{f_n}{\|f_n'\|_2}$$

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n'$$

Montrer que la famille $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale dans $(C([0, 1]), (\cdot \mid \cdot))$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1] : u_n(x) = \left[\frac{2(1 + a^2\lambda_n^2)}{1 + a + a^2\lambda_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sin[\lambda_n(1 - x)]}{\lambda_n}$$

Pour chaque $f \in C([0, 1])$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, on posera : $c_n(f) = (f \mid v_n)$.

6. On suppose $a > 0$ et on considère la fonction $f \in C([0, 1])$ définie par :

$$x \in [0, 1] \mapsto f(x) = 1$$

(a) Déterminer les coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(1 + a + a^2\lambda_n^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que les séries $\sum c_n(f)v_n$ et $\sum c_n(f)u_n$ convergent normalement sur $[0, 1]$.

Quelle relation y a-t-il entre leurs sommes ?

(c) Montrer que quand $a \to +\infty$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(f)u_n(0) = O\left(\frac{1}{a^2}\right)$.

7. On suppose que $a = 0$ et on considère la fonction $g \in C([0, 1])$ définie par :

$$x \in [0, 1] \mapsto g(x) = x$$

(a) Calculer les coefficients $(c_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la série $\sum c_n(g)v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

(c) On admet que sa somme est g. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2}$ puis $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II Application en hydrodynamique

Présentation du problème : *On considère l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques planes parallèles infinies, écartées d'une distance $h > 0$, quand une des plaques est immobile et que l'autre peut glisser librement en translation dans son plan. On suppose que l'écoulement est généré par densité surfacique de forces, $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{i}$ constante, appliquée à la plaque mobile à partir de l'instant initial*

$t=0$, le système étant précédemment au repos. A un instant donné $t>0$, le champ des vitesses est alors invariant par translation selon la direction $\overrightarrow{i}$ et la vitesse en un point : $\overrightarrow{V}=v(y,t)\overrightarrow{i}$ est dirigée selon $\overrightarrow{i}$ et ne dépend que de la distance y de ce point à la plaque mobile. On peut montrer, et on l'admettra, que v est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{\partial v}{\partial t}=\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \forall t\in]0,+\infty[: v(h,t)=0 \\ \forall t\in]0,+\infty[: m\dfrac{\partial v}{\partial t}(0,t)=\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}(0,t)+F \end{array}\right. \tag{2}$$

et vérifie la condition initiale :

$$\forall y\in[0,h] : v(y,0)=0 \tag{3}$$

Les réels ρ, m et μ sont des constantes strictement positives qui représentent respectivement la densité volumique de masse du fluide, la densité surfacique de masse de la plaque mobile et la viscosité du fluide.

Le but de cette partie est de déterminer v.

Si I et J sont deux intervalles quelconques, non nécessairement bornés, on rappelle que :

1. Une application à valeurs réelles définie sur $I\times J$ est dite de classe C^k si elle admet en tout point de $I\times J$ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k qui sont continues sur $I\times J$.

2. Si $I=[a,b]$ est un intervalle fermé, x_2 un point de J et f une application à valeurs réelles définie sur $I\times J$, sa dérivée partielle par rapport à la première variable - si elle existe - au point (a,x_2) (resp. (b,x_2)) est la dérivée à droite au point a (resp. à gauche au point b) de l'application : $x\in I\mapsto f(x,x_2)$.

Aux questions 6 et 7 de cette partie, on admettra la proposition suivante qui sera établie à la partie III. Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie. On désigne par $B(\mathcal{A})$ l'espace vectoriel réel des applications bornées de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que l'application $\mathcal{N}_\infty$ de $B(\mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall f\in B(\mathcal{A}) : \mathcal{N}_\infty(f)=\sup_{x\in\mathcal{A}}\{|f(x)|\}$$

est une norme sur $B(\mathcal{A})$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(B(\mathcal{A}),\mathcal{N}_\infty)$, si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N};\forall p\geqslant N,\forall q\geqslant N : \mathcal{N}_\infty(f_p-f_q)\varepsilon$$

On a alors la proposition :

Proposition A *Toute suite de Cauchy de $(B(\mathcal{A}),\mathcal{N}_\infty)$ est uniformément convergente, c'est-à-dire qu'elle converge dans $(B(\mathcal{A}),\mathcal{N}_\infty)$ et si, de plus, elle est formée de fonctions continues sur $\mathcal{A}$ alors sa limite est une fonction continue sur $\mathcal{A}$.*

On dira qu'une fonction v à valeurs réelles, définie sur $[0,h]\times[0,+\infty[$, est solution de (2-3) si :

i) v est de classe C^2 sur $[0,h]\times]0,+\infty[$ et y vérifie (2),

ii) v est continue sur $[0,h]\times[0,+\infty[$

iii) v vérifie (3).

1. Soit v_1 et v_2 deux fonctions de classe C^2 sur $[0,h]\times]0,+\infty[$. On pose : $w=v_1-v_2$. On suppose que v_1 est solution de (2). Montrer que v_2 est solution de (2) si et seulement si w vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{\partial w}{\partial t}=\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \forall t\in]0,+\infty[: w(h,t)=0 \\ \forall t\in]0,+\infty[: m\dfrac{\partial w}{\partial t}(0,t)=\mu\dfrac{\partial w}{\partial y}(0,t) \end{array}\right. \tag{4}$$

2. Soit v_1 et v_2 deux solutions de (2-3). On pose comme ci-dessus, $w=v_1-v_2$.

(a) Montrer que :

$$\forall t>0 : \frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2}\int_0^h w^2(y,t)\ \mathrm{d}y+\frac{m}{2}w^2(0,t)\right]+\mu\int_0^h\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2(y,t)\ \mathrm{d}y=0$$

(b) En déduire que : $\forall t>0 : \left[\dfrac{\rho}{2}\displaystyle\int_0^h w^2(y,t)\ \mathrm{d}y+\dfrac{m}{2}w^2(0,t)\right]=0.$

(c) En déduire que (2-3) admet au plus une solution.

3. Montrer que (2) admet une solution v_0, que l'on déterminera, qui ne dépend pas de la seconde variable t.

4. On suppose que (4) admet une solution w définie et de classe C^2 sur $[0,h] \times]0,+\infty[$, non identiquement nulle et à variables séparables. C'est-à-dire qu'il existe deux fonctions à valeurs réelles, α et β, définies respectivement sur $[0,h]$ et $]0,+\infty[$, telles que :

$$\forall (y,t) \in [0,h] \times]0,+\infty[: w(y,t) = \alpha(y)\beta(t)$$

(a) Justifier qu'il existe un point y_0 de $[0,h]$ tel que $\alpha(y_0) \neq 0$. Montrer alors que β est de classe C^2 et, en considérant l'équation aux dérivées partielles au point (y_0,t), montrer que β est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\beta' = A\beta$$

où A est une constante réelle que l'on précisera en fonction des données et de la valeur en y_0 de la fonction α et de certaines de ses dérivées. En déduire que β ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et peut être prolongée par continuité en 0.

(b) On considère la fonction à valeurs réelles, τ, définie sur $[0,1]$ par :

$$x \in [0,1] \mapsto \tau(x) = \alpha(xh)$$

Justifier que τ est de classe C^2. Montrer alors qu'il existe un réel k et un paramètre $a > 0$, tels que la fonction τ soit solution du problème (1). On précisera a et k en fonction des données et de la valeur en y_0 de la fonction α et de certaines de ses dérivées. Pour toute la suite de cette partie, le paramètre a du problème (1) est fixé à la valeur ainsi obtenue.

(c) En déduire la forme générale des solutions de (4), définies et de classe C^2 sur $[0,h] \times]0,+\infty[$, à variables séparables. Montrer en particulier que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il en existe une et une seule, que l'on notera w_n, telle que :

$$\forall y \in [0,h] : \lim_{t \to 0} w_n(y,t) = u_n\left(\frac{y}{h}\right),$$

où la fonction u_n a été définie à la question **I-5**. Montrer que w_n peut alors être prolongée par continuité sur $[0,h] \times]0,+\infty[$. On notera encore w_n la fonction ainsi obtenue.

5. Pour la suite de cette partie, on admet que la série $\sum c_n(f)v_n$ déterminée à la question **I-6** converge vers f sur $[0,1]$.

(a) En déduire qu'il existe une suite de réels, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on précisera, telle que

$$\forall y \in [0,h] : -v_0(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n\left(\frac{y}{h}\right)$$

et telle que la convergence de cette série soit uniforme sur $[0,h]$.

(b) Etablir qu'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

6. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction à valeurs réelles, f_n, définie sur $[0,h] \times [0,+\infty[$, par : $f_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p w_p$.

(a) Soit $y \in [0,h]$ et $t \in [0,+\infty[$ deux réels fixés. Montrer que la série numérique $\sum a_p w_p(y,t)$ converge absolument.

En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet sur $[0,h] \times [0,+\infty[$ une limite simple, que l'on notera w.

(b) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et bornée sur $[0,h] \times [0,+\infty[$.

(c) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $(B([0,h] \times [0,+\infty[), \mathcal{N}_\infty)$ et en déduire que w est continue sur $[0,h] \times [0,+\infty[$.

7. On garde les notations de la question précédente. Soient $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $r+s \geqslant 1$ et soit $t_0 > 0$ un réel.

(a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^{r+s} f_n}{\partial x^r \partial t^s}$ définie, continue et bornée sur $[0,h] \times [t_0,+\infty[$.

(b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\partial^{r+s} f_n}{\partial x^r \partial t^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $(B([0,h]\times[t_0,+\infty[),\mathcal{N}_\infty)$.

(c) En déduire que w admet des dérivées partielles à tout ordre définies et continues sur $[0,h]\times[0,+\infty[$.

8. Déduire de ce qui précède que w est une solution du système (4) puis que $v = v_0 + w$ est alors la solution du problème (2-3).

9. Expliciter, en fonction des données et des nombres $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la vitesse $v(0,t)$ de la plaque mobile.

10. Montrer que la vitesse de la plaque mobile est alors donnée par :

$$\frac{Fh}{\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)\right]+O\left(\frac{1}{a}\right)$$

où t_0 est un réel dont on donnera un équivalent en fonction de $\dfrac{1}{a}$. Interpréter physiquement le temps t_0.

III Etablissement de la proposition A

On se propose d'établir la proposition A et on conserve les notations introduites à ce sujet dans la partie précédente.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ et soit x sa limite. Soit $\varepsilon > 0$ un réel donné. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geqslant N; \forall q \geqslant N : |x_p - x_q| \leqslant \varepsilon$$

(a) Montrer que : $\forall p \geqslant N; \forall q \geqslant N : |x_p - x| \leqslant \varepsilon + |x_q - x|$

(b) En déduire que : $\forall p \geqslant N : |x_p - x| \leqslant \varepsilon$

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(B(\mathcal{A},\mathbb{R}),\mathcal{N}_\infty)$.

(a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet sur $\mathcal{A}$ une limite simple que l'on notera f.

(b) Déduire de la question **1** que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(B(\mathcal{A},\mathbb{R}),\mathcal{N}_\infty)$.

(c) Montrer que si de plus les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $\mathcal{A}$, alors f l'est également.

Fin de l'énoncé