CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et Objectif

- Etant donné un intervalle J de $\mathbf{R}$ et une fonction f à valeurs réelles, continue par morceaux et intégrable sur J, on note $\int_J f(x)\,dx$ l'intégrale de f sur J.

- On désigne par :

- α un nombre réel ;
- φ_α la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}$ lorsque $x>0$ et $\varphi_\alpha(0)=0$;
- h la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^x-1}$ lorsque $x \neq 0$ et $h(0,t)=t$;

- On note :

$$I(\alpha) = \int_{[0,+\infty[} \varphi_\alpha(x)\ dx\ ;$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{]0,+\infty[} e^{-x}x^{\alpha-1}dx\ ;$$

$$H(t) = \int_{[0,+\infty[} h(x,t)\ dx\ .$$

- Lorsque la série $\Sigma \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge on note $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

L'objet de ce problème est une étude de la fonction H.

La première partie fournit l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide des fonctions Γ et ζ, dans la deuxième partie on étudie la fonction H, dont on obtient une expression explicite grâce à l'étude d'une série de Fourier dans la troisième partie. La quatrième partie exploite les résultats obtenus dans les trois premières parties.

PRELIMINAIRES

P.1/ Préciser, sans justification, l'ensemble de définition $D(\zeta)$ de la fonction ζ.

P.2/ Préciser, sans justification, l'ensemble $D(\Gamma)$ des réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\alpha-1}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$.

P.3/ Etablir la relation $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$ pour $\alpha-1 \in D(\Gamma)$.

P.4/ En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

PREMIERE PARTIE

Soit $\Delta(\varphi)$ l'ensemble des nombres réels α pour lesquels la fonction φ_α est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

1.1/ Déterminer l'ensemble $\Delta(\varphi)$.

1.2/ Monter que φ_α est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

1.3/ On suppose que $\alpha \in \Delta(\varphi)$.
Soit $u_n(x) = x^{\alpha-1}\,e^{-nx}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$.

1.3.1/ Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,+\infty[$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1.3.2/ Montrer que la fonction u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1.3.3/ Justifier avec soin l'égalité :

$$\int_{[0,+\infty[} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\, dx\right].$$

1.3.4/ Exprimer $\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\, dx$ à l'aide de n, de α et de la fonction Γ.

1.3.5/ En déduire l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide de α et des fonctions Γ et ζ.

1.3.6/ Quelle est la limite de $\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?

1.3.7/ En déduire un équivalent de $I(k)$ pour $k \in \mathbf{N}$ et k tendant vers $+\infty$.

DEUXIEME PARTIE

Rappel : La fonction h est définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$h(x,t) = \frac{\sin(xt)}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \neq 0 \text{ et } h(0,t) = t.$$

II A

2.a.1/ Etudier la continuité sur $\mathbf{R}^2$ de la fonction h.

2.a.2/ Montrer que la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$.

2.a.3/ Montrer que la fonction H est continue sur $\mathbf{R}$.

2.a.4/ Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa dérivée n-ième sous forme intégrale.

II B

Soit g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g_n(x) = e^{-nx}\sin(\alpha x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et α réel.

On désigne par D(g) l'ensemble des nombres réels x tels que la série $\Sigma\, g_n(x)$ soit convergente et on note : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ pour $x \in D(g)$.

2.b.1/ Déterminer l'ensemble D(g) lorsque $\alpha = 0$ (resp. lorsque $\alpha \neq 0$).

2.b.2/ Expliciter $g(x)$ pour $x \in D(g)$.

2.b.3/ Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$.

2.b.4/ Justifier avec soin l'égalité :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{[0,+\infty[} g_n(x)dx \right].$$

2.b.5/ Calculer $\int_{[0,+\infty[} g_n(x)dx$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et en déduire la valeur de $H(\alpha)$ sous la forme de la somme d'une série.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie on suppose $\alpha \neq 0$.

On désigne par E_α l'application 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$E_\alpha(x) = e^{\alpha x} \text{ lorsque } x \in [0 , 2\pi[.$$

On considère la série de Fourier de la fonction E_α : $\sum c_n e^{inx}$, $n \in \mathbf{Z}$

et on désigne par $S_p(x)$ la somme partielle $\sum_{n=-p}^{+p} c_n e^{inx}$.

3.1/ Calculer les coefficients de Fourier c_n de la fonction E_α.

3.2/ En déduire les coefficients de Fourier cosinus (resp. sinus) de la fonction E_α.

3.3/ La suite $(S_p(x))$, $p \in \mathbf{N}$ est-elle convergente pour tout x réel ?

3.4/ Justifier la convergence de la série $\sum \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$ (on donnera une réponse sous une forme utilisant la fonction cotangente hyperbolique).

3.5/ Déduire de 2.b.5/ et 3.4/ une expression explicite de $H(\alpha)$.

QUATRIEME PARTIE

On désigne par t un nombre réel, par ψ_t la fonction définie sur **R** par :

$$\psi_t(x) = \frac{sh(tx)}{e^x - 1} \quad \text{lorsque } x \neq 0 \quad \text{et } \psi_t(0) = 0,$$

(où sh désigne la fonction sinus hyperbolique).

4.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}(\psi)$ des nombres réels t tels que la fonction ψ_t soit intégrable sur $[0,+\infty[$.

4.2/ On suppose que $t \in \mathcal{I}(\psi)$.

4.2.1/ Justifier avec soin l'égalité :

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)\ !} I(2k+2)$$

$$(\text{où } I(\alpha) = \int_{[0,+\infty[} \varphi_\alpha(x)\ dx).$$

4.2.2/ En déduire que la série entière $\sum (-1)^k \zeta(2k+2)\ t^{2k+1}$ est convergente pour $t \in \mathcal{I}(\psi)$ et expliciter sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \zeta(2k+2)\ t^{2k+1}$.

4.3/ Quel est le rayon de convergence de la série entière $\Sigma\ (-1)^k\ \zeta\ (2k+2)\ t^{2k+1}$?

4.4/ On pose $a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{\zeta\ (2k+2)}{\pi^{2k+2}}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

4.4.1/ Montrer que, pour tout x dans un intervalle à préciser, on a l'égalité suivante :

$$(sh\ x) \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\ x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

4.4.2/ En déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{k} \dfrac{a_{2p+1}}{(2\ (k-p)+1)!}$, puis en déduire que chaque a_{2k+1} est un nombre rationnel.

4.4.3/ Calculer a_5 et $\zeta(6)$.