**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

# MATHEMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*Les calculatrices sont autorisées.*

****

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

****

Dans tout ce problème, on désigne par $\mu$ une application continue $2\pi$ - périodique de **R** dans **R** et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \qquad y'' + y = \mu(t)$$

On désigne par $\varphi_\mu$ la solution sur **R** de $(E_\mu)$ qui vérifie en outre les relations $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\ \cos t\ dt \qquad \text{et} \qquad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\ \sin t\ dt$$

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de la fonction $\varphi_\mu$. Dans la partie II et la partie III, on étudie un exemple explicite.

## PARTIE I

On désigne par $F_\mu$ la fonction définie sur **R** par $F_\mu(x) = (\sin x)\ G_\mu(x) - (\cos x)\ H_\mu(x)$.

Tournez la page S.V.P.

Pour simplifier les notations, on écrira $F,\ G,\ H,\ \varphi$ pour désigner les fonctions $F_\mu,\ G_\mu,\ H_\mu,\ \varphi_\mu$.

**I.1** Justifier la dérivabilité de $G, H$ et donc $F$. Préciser $F(0)$ et $F'(0)$.

**I.2** Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer $F''(x)+F(x)$ en fonction de $\mu(x)$.

**I.3** Justifier l'affirmation $F=\varphi$.

**I.4 Etude du caractère $2\pi$ - périodique de $\varphi$.**

**I.4.1** Calculer la dérivée de $G(x+2\pi)-G(x)$ et $H(x+2\pi)-H(x)$.

**I.4.2** Exprimer $G(x+2\pi)-G(x)$ en fonction de $G(2\pi)$ et $H(x+2\pi)-H(x)$ en fonction de $H(2\pi)$.

**I.4.3** Exprimer $\varphi(x+2\pi)-\varphi(x)$ en fonction de $\sin x,\ \cos x,\ G(2\pi),\ H(2\pi)$.

**I.4.4** A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction $\varphi$ est-elle $2\pi$ - périodique ?

**I.4.5** La fonction $\varphi$ est-elle $2\pi$ - périodique lorsque $\mu(t)=\sin t$ ? (resp. lorsque $\mu(t)=\cos t$ ?)

**I.4.6** La fonction $\varphi$ est-elle bornée lorsque $\mu(t)=\sin t$ ? (resp. lorsque $\mu(t)=\cos t$ ?)

**I.4.7** Montrer que la fonction $\varphi$ est $2\pi$ - périodique lorsque $\mu(t)=|\sin t|$.

**I.4.8** Les fonctions $\varphi$, $\varphi'$, et $\varphi''$ sont-elles bornées lorsque $\mu(t)=|\sin t|$ ?

**Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mu(t)=|\sin t|$.**

## PARTIE II

### Calcul de $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\ dt$

**II.1** Justifier l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $t\mapsto e^{-t}|\sin t|$.

**II.2** Pour $n\in\mathbf{N}$, on note $v_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\ dt$.

**II.2.1** Calculer $v_0$.

**II.2.2** Montrer qu'il existe un nombre réel $\rho$ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $v_n = \rho^n v_0$.

**II.2.3** En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

**II.2.4** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\left|\sin t\right|\, dt$.

**II.3**

**II.3.1** Déduire des résultats obtenus dans la partie I (en particulier de **I.4.8**) que les fonctions $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$, $t \mapsto e^{-t}\varphi'(t)$ et $t \mapsto e^{-t}\varphi''(t)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$.

**II.3.2** Etablir une relation entre $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\mu(t)\, dt$ et $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\, dt$.

En déduire $\int_{\mathbf{R}+} e^{-t}\varphi(t)\, dt$.

## PARTIE III

### Développement de Fourier des fonctions $\mu$ et $\varphi$.

Si $f$ est une application continue $2\pi$ - périodique de **R** dans **R,** on désigne par $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de $f$ :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, \cos(nt)\, dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, \sin(nt)\, dt \quad \text{pour} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Lorsqu'elle converge, on désigne par $SF_f(t)$ la somme de la série de Fourier :

$$SF_f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\, \cos(nt) + b_n(f)\, \sin(nt).$$

**III.1**

**III.1.1** Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction $\mu$ **(rappel :** $\mu(t) = \left|\sin t\right|$**).**

**III.1.2** Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction $\varphi$ **(rappel :** $\varphi''(t) + \varphi(t) = \left|\sin t\right|$ **,** $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$**).**

**III.2 Série de Fourier de la fonction $\mu$.**

**III.2.1** Calculer les coefficients $a_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ ?

**III.2.2** Etablir la convergence de la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{(4p^2-1)}$ et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

**III.2.3** Etablir la convergence de la série $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{\left(4p^2-1\right)^2}$ et calculer sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(4p^2-1\right)^2}$.

**III.3 Série de Fourier de la fonction $\varphi$.**

**III.3.1** Etudier la parité des fonctions $G, H$ puis celle de la fonction $\varphi$. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ ?

**III.3.2** Etablir une relation entre $a_n(\varphi'')$ et $a_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

**III.3.3** En déduire la valeur de $a_n(\varphi)$ pour $n \neq 1$.

**III.3.4** Calculer $a_1(\varphi)$.

**III.4** On considère la série $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{\left(4p^2-1\right)\left(16p^4-1\right)}$. Justifier la convergence de cette série et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(4p^2-1\right)\left(16p^4-1\right)}$ en calculant l'intégrale du **II** par un autre procédé qu'on justifiera soigneusement.

**III.5** On considère dans cette question l'application $\phi$ de classe $C^2$ de **R** dans **R** vérifiant :

$$\phi''(t)+\phi(t)=\varphi(t) \text{ pour tout } t\in\mathbf{R}$$

et $$\phi(0)=\phi'(0)=0.$$

**III.5.1** La fonction $\phi$ est-elle $2\pi$ - périodique ?

**III.5.2** La fonction $\phi$ est-elle bornée sur **R** ?

**III.5.3** La fonction $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$ ?

**Fin de l'énoncé.**